MINISTÈRE de L'ÉDUCATION NATIONALE
****
CENTRE NATIONAL des EXAMENS et CONCOURS de L'ÉDUCATION

RÉPUBLIQUE du MALI
****
UN PEUPLE – UN BUT – UNE FOI

EXAMEN DU BACCALAURÉAT BLANC

SESSION DE : JUILLET 2022		**ÉPREUVE DE :** MATHÉMATIQUES	
SÉRIE : T.S.E/S.T.I	**DATE :** 07/07/2022	**DURÉE :** 04 HEURES	**CŒFF :** 04

SUJET

Exercice 1 :..(07,50pts)

I. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixe $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1°) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n puis Z_n en fonction de Z_0 et n. (0,5pt)

2°) Donner Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et trigonométrique. (1,25pts)

3°) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère d'unité graphique 4cm. (1pt)

4°) Déterminer la distance OM_n en fonction de n. (0,25pt)

5°) **a)** Montrer que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$. (0,25pt)

b) On pose $\ell_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $\ell_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots\ldots\ldots + M_nM_{n+1}$).

Déterminer ℓ_n en fonction de n puis la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$. (0,5pt)

6°) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de n. (0,25pt)

7°) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ? (0,25pt)

II. Soit f l'application affine du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même définie par son expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

a) Montrer que f est bijective et admet un unique point invariant J. (0,5pt)

b) Prouver que : $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ où $M' = f(M)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. (1pt)

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f. (0,5pt)

III. Soit ABCD un carré du plan.

a) Écrire A comme barycentre des points B, C et D. (On précisera les coefficients des points). (0,75pt)

b) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in (\mathscr{P}) / \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0\right\}$. (0,5pt)

Exercice 2 :..(03,50pts)

I. 1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (p, q) : $11p - 7q = 1$. (0,25pt)

2°) **a)** La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4, le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ? (0,5pt)

b) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200. (0,25pt)

3°) On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ? (0,5pt)

4°) Démontrer par récurrence les propriétés suivantes : (1pt)

a) $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$; **b)** $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

N.B : $n!$ *désigne factorielle* n

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$.

1°) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x) = e^{2x}g(x)$.

Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. (0,5pt)

2°) En déduire toutes les solutions de (E). (0,5pt)

Problème : ....(09,00pts)

On considère, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Unité graphique : $5cm$).

Dans tout le problème, les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A :

1°) Calculer $f_n(0)$ et la limite de f_n en $+\infty$. (0,5pt)

2°) Calculer $f_n{}'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n. (0,75pt)

3°) Encadrer $f_n(x)$ par deux entiers consécutifs. (0,5pt)

4°) Démontrer que la dérivée seconde $f_n{}''$ de f_n s'annule pour une unique valeur positive a_n égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. (0,5pt)

5°) Soit A_n le point de $(\mathcal{C}_n)$ d'abscisse a_n.

a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T_n) à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point d'abscisse a_n est :

$y = -\sqrt{\dfrac{2n}{e}}x + \dfrac{2}{\sqrt{e}}$. (0,5pt)

b) Démontrer que toutes les droites (T_n) passe par un point fixe dont on donnera les coordonnées. (0,5pt)

6°) Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $h(x) = e^{-nx^2} + \sqrt{\dfrac{2n}{e}}x - \dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

a) Calculer $h(a_n)$. (0,25pt)

b) Utiliser la dérivée seconde de h pour trouver le signe de $h'(x)$ et dresser le tableau de variation de h. (1pt)

c) En déduire la position de $(\mathcal{C}_n)$ par rapport à (T_n). (0,75pt)

7°) Construire $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$. (1pt)

Partie B :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1°) Étudier le sens de variation de la suite (U_n). (0,5pt)

2°) Démontrer que $\forall\, x \in [0\,;1]$, on a : $0 \leq U_n \leq 1$. (0,5pt)

3°) En déduire des questions précédentes que la suite (U_n) est convergente. (0,25pt)

Dans la suite de l'énoncé, on suppose n supérieur ou égal à 2.

4°) Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2}\,dx \leq \frac{1}{\ln(n)}$. (0,25pt)

5°) Démontrer que $\forall\, x \in \left[\dfrac{1}{\ln(n)}\,;1\right]$, on a : $0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$. (0,5pt)

6°) Démontrer que : $0 < \displaystyle\int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2}\,dx \leq \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right)e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$. (0,5pt)

7°) Calculer la limite de la suite (U_n). (0,25pt)

BONNE CHANCE !!!

La mathématique est un jeu