DEVOIR N°1 DE MATHÉMATIQUES

Série : T.S.E	28/02/2021	Durée : 03h00

Exercice 1 : .... (5pts)

1) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants : (2,25pts)

$$z_0=\frac{(\sqrt{8}-i\sqrt{8})^5(-3+i\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^4}\quad;\quad z_1=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{-\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}\quad;\quad z_2=1+i\tan\alpha\quad;\quad \mathrm{T}=\frac{1}{1+i\tan\alpha}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: (1pt)

a) $\begin{cases}5iz+(2-i)z'=1+12i\\(2-3i)z+(5-2i)z'=39-10i\end{cases}$; b) $z+|z|=1+2i$.

3) Linéariser l'expression : $\mathrm{A}=\cos(3x)\times\sin^3(2x)$. (0,5pt)

4) a) Vérifier que $(3+2i)^4=-119+120i$. (0,25pt)

b) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation $z^4=-119+120i$. (1pt)

Exercice 2 : .... (6pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique 1cm)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2-6z+9=0$. (0,5pt)

2) Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{P}}=\frac{3}{2}(1+i)\quad,\quad z_{\mathrm{Q}}=\frac{3}{2}(1-i)\quad,\quad z_{\mathrm{R}}=-2i\sqrt{3}.$$

a) Placer les points P, Q et R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice. (1,25pts)

b) On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.
Vérifier que l'affixe z_{S} du point S est : $3+(2\sqrt{3}-3)i$. (0,5pt)

c) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer les affixes z_{A} et z_{C} des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation r. (1,25pts)

d) On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\vec{v}$.
Calculer les affixes z_{B} et z_{D} des points B et D. (1,5pts)

e) Démontrer que : $\frac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{P}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{P}}}=i$. (0,75pt)

f) En déduire la nature du quadrilatère ABCD. (0,25pt)

Problème : .... (9pts)

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : (3,25pts)

Pour tout nombre complexe z, on pose : $\mathrm{P}(z)=z^3+(1+i)z^2+(2+6i)z-8$.

1) a) Déterminer le réel y tel que iy soit une racine de $\mathrm{P}(z)$. (0,5pt)

b) Déterminer a et b tels que pour tout complexe z : $\mathrm{P}(z)=(z-iy)(z^2+az+b)$. (0,5pt)

2) a) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $(3-3i)^2$. (0,25pt)

b) Achever la résolution de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$, puis écrire chacune des solutions sous forme exponentielle. (2pts)

Partie II : (5,75pts)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$. (unité graphique : 4cm)
On note A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}}=-1+i$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}-\{z_{\mathrm{A}}\}$ par : $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$

1) On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels.

a) Déterminer $\mathrm{Ré}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de x et y. (1,5pts)

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que $f(z)$ soit réel. (0,75pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que $f(z)$ soit imaginaire pur. (0,75pt)

2) Soit B le point d'affixe $z_B = \frac{1}{2}i$ et C le point d'affixe $z_C = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$.

a) Vérifier que B appartient à (E) et à (F) et que C appartient à (F). Placer B et C sur la figure. (2pts)

b) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$. En déduire la nature du triangle ABC. (0,75pt)

DEVOIR N°1 DE MATHÉMATIQUES

Série : T.S.Exp	28/02/2021	Durée : 03h00

Exercice 1 : .... (5pts)

1) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants : (2,25pts)

$$z_0 = \frac{\left(\sqrt{8} - i\sqrt{8}\right)^5\left(-3 + i\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)^4} \quad ; \quad z_1 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{-\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}} \quad ; \quad z_2 = 1 + i\tan\alpha \quad ; \quad T = \frac{z_0}{z_1}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: (1pt)

a) $\begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1 + 12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39 - 10i \end{cases}$; b) $(1-2i)\overline{z} + 2z = 1 + 2i.$

3) Linéariser l'expression : $A = \cos(3x) \times \sin^3(2x)$. (0,5pt)

4) a) Vérifier que : $(3 + 2i)^4 = -119 + 120i$. (0,25pt)

b) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation : $z^4 + 119 - 120i = 0$. (1pt)

Exercice 2 : .... (6pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique 1cm)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 6z + 9 = 0$. (0,5pt)

2) Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives :

$$z_P = \frac{3}{2}(1+i) \quad , \quad z_Q = \frac{3}{2}(1-i) \quad , \quad z_R = -2i\sqrt{3}.$$

a) Placer les points P, Q et R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice. (1,25pts)

b) On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.
Vérifier que l'affixe z_S du point S est : $3 + \left(2\sqrt{3} - 3\right)i$. (0,5pt)

c) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation r. (1,25pts)

d) On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\vec{v}$.
Calculer les affixes z_B et z_D des points B et D. (1,5pts)

e) Démontrer que : $\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i$. (0,75pt)

f) En déduire la nature du quadrilatère ABCD. (0,25pt)

Problème : .... (9pts)

On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2cm)

1) Soit le polynôme $\mathcal{Q}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$: $\mathcal{Q}(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a) Comparer $\mathcal{Q}(\overline{z})$ et $\overline{\mathcal{Q}(z)}$. (0,5pt)

b) Montrer que $1 + i$ est une racine de l'équation $\mathcal{Q}(z) = 0$. (0,5pt)

c) Déterminer a, b et c tel que: $\mathcal{Q}(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$. (0,75pt)

d) Achever la résolution de l'équation $\mathcal{Q}(z) = 0$, puis écrire chacune des solutions sous forme exponentielle. (2pts)

2) On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $1 + i$; $1 - i$; 2.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer r(B) ; puis l'affixe de r(C). (1pt)

b) Démontrer que les points O, B, A et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. (1,25pts)

3) Soit l'application f du plan P privé du point C qui à tout point M d'affixe $z \neq 2$ associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z - (1+i)}{z - 2}$.

a) Déterminer f(A) ; f(B). (0,5pt)

b) Déterminer l'affixe de E tel que $f(E) = C$. (0,5pt)

c) Démontrer que (AB) est perpendiculaire à (BE). (0,5pt)

4) Tracer les droites (AB), (BE) et le cercle $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (1,5pts)

Correction du devoir N°1 de Maths 2020-2021

TSE

Exo : 1

1°) Déterminons la forme trigonométrique :

$* \; z_0 = \dfrac{(\sqrt{8}-i\sqrt{8})^5(-3+i\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^4}$

Posons : $\begin{cases} a = \sqrt{8}-i\sqrt{8} \\ b = -3+i\sqrt{3} \\ c = \sqrt{2}+i\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = [4 ; -\frac{\pi}{4}] \\ b = [2\sqrt{3} ; \frac{5\pi}{6}] \\ c = [2\sqrt{2} ; \frac{\pi}{3}] \end{cases}$

$\Rightarrow z_0 = \dfrac{a^5 \times b}{c^4} = \dfrac{[4 ; -\frac{\pi}{4}]^5 \times [2\sqrt{3} ; \frac{5\pi}{6}]}{[2\sqrt{2} ; \frac{\pi}{3}]^4} = \dfrac{[2048\sqrt{3} ; -\frac{5\pi}{12}]}{[64 ; \frac{4\pi}{3}]}$

$\Rightarrow z_0 = [32\sqrt{3} ; -\frac{7\pi}{4}]$ alors $\boxed{z_0 = 32\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right]}$ (+0,75)

$* \; z_1 = \dfrac{e^{-i\pi/4}}{-\sqrt{3}e^{-i\pi/3}}$

Posons : $\begin{cases} a = e^{-i\pi/4} \\ b = -\sqrt{3} \\ c = e^{-i\pi/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = [1 ; -\frac{\pi}{4}] \\ b = [\sqrt{3} ; \pi] \\ c = [1 ; -\frac{\pi}{3}] \end{cases}$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{a}{b \times c} = \dfrac{[1 ; -\pi/4]}{[\sqrt{3} ; \pi][1 ; -\frac{\pi}{3}]} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{11\pi}{12}\right]$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right]}$ (+0,5)

$* \; z_2 = 1 + i\tan\alpha$

$|z_2| = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$ or $\left(1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$

$\Rightarrow |z_2| = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$

Soit $\theta = \arg(z_2)$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \cos\alpha \\ \sin\theta = \dfrac{\tan\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \alpha$ alors $z_2 = \left[\frac{1}{\cos\alpha} ; \alpha\right]$

$\boxed{z_2 = \frac{1}{\cos\alpha}[\cos(\alpha) + i\sin\alpha]}$ (+0,5)

$* \; T = \dfrac{1}{1+i\tan\alpha}$

Posons $\begin{cases} a = 1 \\ z_2 = 1 + i\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = [1 ; 0] \\ z_2 = [\frac{1}{\cos\alpha} ; \alpha] \end{cases}$

$T = \dfrac{a}{z_2} = \dfrac{[1 ; 0]}{[\frac{1}{\cos\alpha} ; \alpha]} \Rightarrow T = [\cos\alpha ; -\alpha]$

$\boxed{T = \cos\alpha[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]}$ (+0,5)

2°) Résolvons dans $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1+12i & (1) \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39-10i & (2) \end{cases}$

$\begin{array}{l} (2-3i) \\ (-5i) \end{array} \begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1+12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39-10i \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{(15+10i)z} + (1-8i)z' = 38+21i \\ -\cancel{(15+10i)z} + (-10-25i)z' = -50-195i \end{cases}$

$-(9+33i)z' = -(12+174i)$

$\Rightarrow z' = 5+i$

Remplaçons z' par $5+i$ dans (1)

$5iz + (2-i)z' = 1+12i \Rightarrow z = 3+2i$

$\boxed{S = \{(3+2i ; 5+i)\}}$ (+0,75)

b) $z + |z| = 1+2i$

posons $z = x+iy$

$x+iy+|x+iy| = 1+2i \Rightarrow (x+\sqrt{x^2+y^2}) + iy = 1+2i$

$\begin{cases} x + \sqrt{x^2+y^2} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+4} = 1-x \quad ; D_V =]-\infty ; 1] \\ y = 2 \end{cases}$

$(\sqrt{x^2+4})^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2+4 = 1-2x+x^2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

alors $z = -\frac{3}{2} + 2i$

$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} + 2i\right\}}$ (+0,25)

3°) Linéarisons :

$A = \cos(3x) \times \sin^3(2x)$ or $\begin{cases} \cos(3x) = \frac{1}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix}) \\ \sin^3(2x) = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 (e^{2ix} - e^{-2ix})^3 \end{cases}$

$A = -\frac{1}{16i}\left[(e^{9ix} - e^{-9ix}) - 3(e^{5ix} - e^{-5ix}) + (e^{3ix} - e^{-3ix}) + 3(e^{ix} - e^{-ix})\right]$

$\boxed{A = \frac{1}{8}[3\sin(5x) - \sin(9x) - \sin(3x) - 3\sin(x)]}$ (+0,5)

4°) a°) Vérifions que : $(3+2i)^4 = -119+120i$

$[(3+2i)^2]^2 = (5+12i)^2 = -119+120i$

alors $\boxed{(3+2i)^4 = -119+120i}$ c.q.f.v (+0,25)

b) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation $z^4 = -119+120i$

or $-119+120i = (3+2i)^4 \Rightarrow z^4 = (3+2i)^4$

$\Rightarrow \left(\dfrac{z}{3+2i}\right)^4 = 1$ posons $U = \dfrac{z}{3+2i}$

alors $U^4 = 1$ or les racines quatrième de l'unité sont : $1 ; -1 ; i ; -i$

$U = \dfrac{z}{3+2i} \Rightarrow z = (3+2i)U$

$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } U = 1 \Rightarrow z = 3+2i \\ * \text{ si } U = -1 \Rightarrow z = -3-2i \\ * \text{ si } U = i \Rightarrow z = -2+3i \\ * \text{ si } U = -i \Rightarrow z = 2-3i \end{array}\right\} \boxed{S = \{3+2i ; -3-2i ; -2+3i ; 2-3i\}}$ (+1)

Exo : (2)

1) Résolvons dans ℂ :

$2z^2 - 6z + 9 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(2)(9) = -36 = 36i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6i$

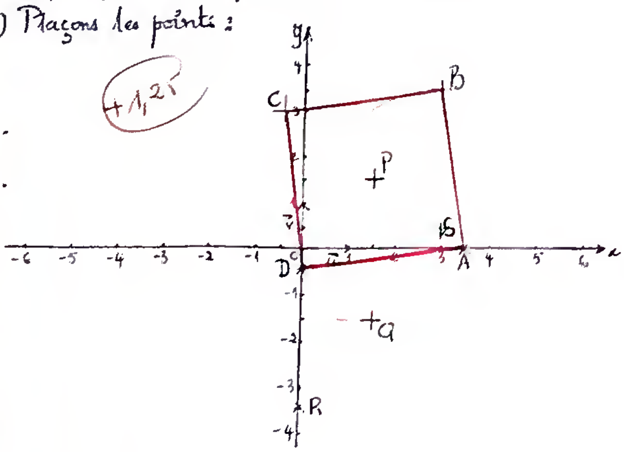
$z_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$ et $z_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i ; \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right\}}$ (+0,5)

2) $z_P = \frac{3}{2}(1+i)$; $z_Q = \frac{3}{2}(1-i)$; $z_R = -2i\sqrt{3}$

a) Plaçons les points :

(+1,25)



b) $S_Q(R) = S$

Vérifions que : $z_S = 3 + (2\sqrt{3} - 3)i$

$z' - z_\Omega = -(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z_S - z_Q = -(z_R - z_Q)$

$z_S = +2i\sqrt{3} + 2\left[\frac{3}{2}(1-i)\right] \Rightarrow \boxed{z_S = 3 + (2\sqrt{3} - 3)i}$ c.q.f.d (+0,5)

c) r : la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Déterminons :

* L'affixe de A image de R par la rotation :

$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega) \Rightarrow z_A - z_O = e^{i\pi/2}(z_R - z_O)$

$z_A = i z_R \Rightarrow \boxed{z_A = 2\sqrt{3}}$ (+0,5)

* L'affixe de C image de S par la rotation :

$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega) \Rightarrow z_C - z_O = e^{i\pi/2}(z_S - z_O)$

$z_C = i z_S \Rightarrow \boxed{z_C = (3 - 2\sqrt{3}) + 3i}$ (+0,75)

d) Translation de vecteur $3\vec{v}$

$3\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w}\binom{0}{3} \Rightarrow z_{\vec{w}} = 3i$

Calculons :

* L'affixe de B image de S par la translation :

$z' = z + z_{\vec{w}} \rightarrow z_B = z_S + 3i \Rightarrow \boxed{z_B = 3 + 2i\sqrt{3}}$ (+0,75)

* L'affixe de D image de R par la translation :

$z' = z + z_{\vec{w}} \Rightarrow z_D = z_R + 3i \Rightarrow \boxed{z_D = (3 - 2\sqrt{3})i}$ (+0,75)

e) Démontrons que : $\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i$

$\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + 3i - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}{3 + 2i\sqrt{3} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i} = \frac{(3 - 4\sqrt{3}) + 3i}{3 + (4\sqrt{3} - 3)i} = i$

alors $\boxed{\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i}$ c.q.f.d (+0,75)

f) Déterminons la nature du quadrilatère ABCD :

ABCD est un carré. (+0,25)

Problème :

Partie : (I)

On pose : $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2+6i)z - 8$

1) a) Déterminons :

(iy) est une racine si $P(iy) = 0$

$\rightarrow (iy)^3 + (1+i)(iy)^2 + (2+6i)(iy) - 8 = 0$

$(-y^2 - 6y - 8) + i(-y^3 - y^2 + 2y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y^2 - 6y - 8 = 0 & (1) \\ -y^3 - y^2 + 2y = 0 & (2) \end{cases}$

racine imaginaire pur alors Re = 0

$-y^2 - 6y - 8 = 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 8 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4(8) = 4 = 2^2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = -2 \end{cases}$

Vérifions si $y = -4$ est solution de (2)

$-(-4)^3 - (-4)^2 + 2(-4) = 40 \neq 0$

Vérifions si $y = -2$ est solution de (2)

$-(-2)^3 - (-2)^2 + 2(-2) = 0 = 0$ Vrai

Alors $\boxed{y = -2}$ et $\boxed{z_0 = -2i}$ (+0,5)

b) Déterminons a et b tels que : $P(z) = (z - iy)(z^2 + az + b)$ (+0,5)

	1	1+i	2+6i	-8
-2i		-2i	-2-2i	8
	1	1-i	4i	0

alors : $\boxed{a = 1 - i}$ et $\boxed{b = 4i}$

$\Rightarrow \boxed{P(z) = (z + 2i)[z^2 + (1-i)z + 4i]}$

2) a) Mettons sous forme algébrique :

$(3 - 3i)^2 = 9 - 12i - 9 \Rightarrow \boxed{(3 - 3i)^2 = -18i}$ (+0,25)

b) Achevons la résolution de $P(z) = 0$:

$P(z) = (z + 2i)[z^2 + (1-i)z + 4i]$

$P(z) = 0 \Rightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 + (1-i)z + 4i = 0$

$z + 2i = 0 \Rightarrow z_0 = -2i$

$z^2 + (1-i)z + 4i = 0$

$\Delta = (1-i)^2 - 4(4i) = -18i = (3 - 3i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 - 3i$

$z_1 = \frac{-1 + i - 3 + 3i}{2} \Rightarrow z_1 = -2 + 2i$

$z_2 = \frac{-1 + i + 3 - 3i}{2} \Rightarrow z_2 = 1 - i$

$\boxed{S = \{1 - i ; -2 + 2i ; -2i\}}$ (+0,5)

* Sous forme exponentielle :

$\Rightarrow z_0 = -2i \Rightarrow z_0 = \left[2 ; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{z_0 = 2e^{-i\pi/2}}$ (+0,5)

$\Rightarrow z_1 = 1 - i \Rightarrow z_1 = \left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}}$ (+0,5)

$\Rightarrow z_2 = -2 + 2i \Rightarrow z_2 = \left[2\sqrt{2} ; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \boxed{z_2 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}$ (+0,5)

Partie : II

Soit : $f(z) = \dfrac{2z - i}{z+1-i}$

1) On pose $z = x+iy$

a) Déterminons $Ré[f(z)]$ et $Im[f(z)]$:

$$f(z) = \frac{2(x+iy)-i}{(x+iy+1-i} = \frac{2x+2iy-i}{x+iy+1-i} = \frac{(2x+2iy-i)(x+1-iy+i)}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$f(z) = \frac{2x^2+2x+2y^2-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2} + \frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

Alors
$$\boxed{\begin{cases} Ré[f(z)] = \dfrac{2x^2+2x+2y^2-3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2} \\ Im[f(z)] = \dfrac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2} \end{cases}}$$ +1,5

b) Déterminons et construisons l'ens (E) :

$f(z)$ soit réel $\Rightarrow Im[f(z)] = 0 \Leftrightarrow x+2y-1 = 0$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ alors l'ensemble (E) est la droite (D) d'équation $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$ +0,5

c) Déterminons et construisons l'ens (F) :

$f(z)$ soit imaginaire pur $\Rightarrow Ré[f(z)] = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+2y^2-3y+1 = 0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} = 0$

Mettons sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$

Par identification :
$$\begin{cases} x^2 = x^2 \\ -2ax = x \\ y^2 = y^2 \\ -2by = -\frac{3}{2}y \\ a^2+b^2-r^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \\ 1 = 1 \\ b = \frac{3}{4} \\ r^2 = a^2+b^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{5}{16} \end{cases}$$

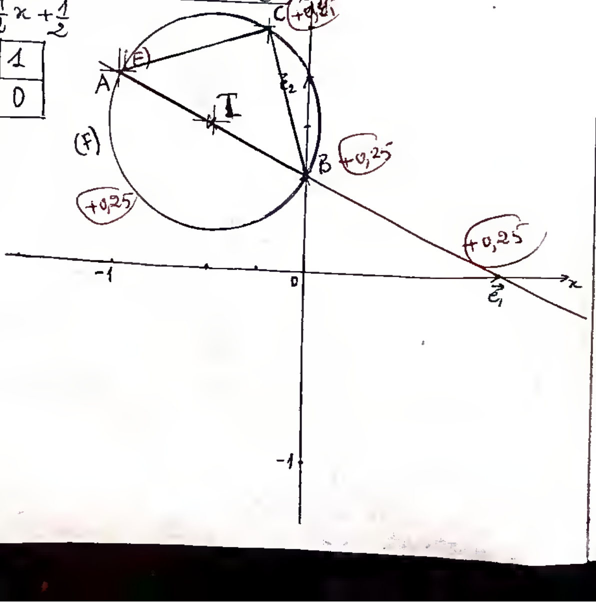
alors on aura : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{13}{16} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}}$ donc l'ens (F) est le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $r^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{4}$ cm +0,5

Construction de (E) et (F)

$D : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

x	0	1
y	1/2	0



2) Soit $z_B = \frac{1}{2}i$; $z_C = -\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$

a) Vérifions que B appartient à (E) et (F) :

* B appartient à (E) ssi les coordonnées de B vérifient l'équation de l'ens (E).

$B\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $(D) : y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Vraie alors B appartient à (E). +0,5

* B appartient à (F) ssi les coordonnées de B vérifient l'équation de l'ens (F)

$B\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$

$\left(0+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

$\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$ Vraie alors B appartient à (F). +0,5

* C appartient à (F) ssi les coordonnées de C vérifient l'équation de l'ens (F)

$C\begin{pmatrix} -1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ et $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$

$\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{1}{16}+\frac{4}{16} = \frac{5}{16}$

$\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$ Vraie alors C appartient à (F) +0,5

b) Ecrivons sous forme trigonométrique :

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1+i+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i}{\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i} = \frac{-3-i}{1-3i} =$$

$\Rightarrow \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = -i$ or $\begin{cases} |-i| = 1 \\ \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \left[1; -\frac{\pi}{2}\right]$

alors $\boxed{\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ +0,5

ABC est un triangle rectangle et isocèle en C. +0,25

Correction du Dévoir N° 1 de Maths : 2020-2021

T.S.Exp

Exo : 1

1°) Déterminons la forme trigonométrique :

* $z_0 = \frac{(\sqrt{8}-i\sqrt{8})^5(-3+i\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^4}$ (Voir page 1) +0,75

* $z_1 = \frac{e^{-i\pi/4}}{-\sqrt{3}e^{i\pi/3}}$ (Voir page 1) +0,5

* $z_2 = 1 + i\tan\alpha$ (Voir page 1) +0,5

* $T = \frac{z_0}{z_1}$ or $\begin{cases} z_0 = [32\sqrt{3} ; -\frac{7\pi}{4}] \\ z_1 = [\frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{11\pi}{12}] \end{cases}$

$\Rightarrow T = \frac{[32\sqrt{3} ; -\frac{7\pi}{4}]}{[\frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{11\pi}{12}]} \Rightarrow T = [96 ; -\frac{5\pi}{6}]$

$\Rightarrow \boxed{T = 96\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$ +0,5

2°) Résolvons dans $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1+12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39-10i \end{cases}$ (Voir page 1) +0,75

b) $(1-2i)\bar{z} + 2z = 1+2i$

posons $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$(1-2i)(x-iy) + 2(x+iy) = 1+2i$

$(3x-2y) + i(-2x+y) = 1+2i$

$\begin{cases} 3x-2y = 1 & ① \\ -2x+y = 2 & ② \end{cases} \Rightarrow 2 \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x+y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=1 \\ -4x+2y = 4 \end{cases}$

$-x = 5$

$x = -5$

Remplaçons x par -5 dans ②

$-2x + y = 2 \Rightarrow y = 2+2(-5) \Rightarrow y = -8$ alors $z = -5-8i$

$\boxed{S = \{-5-8i\}}$ +0,25

3°) Linéarisons :

$A = \cos(3x) \times \sin^3(2x)$ (Voir pages 1) +0,5

4°) a) Vérifions que $(3+2i)^4 = -119+120i$ (Voir page 1) +0,25

b) Déduisons la forme algébrique des solution

$z^4 = -119+120i$ (Voir page 1) +1

Exo : 2 (Voir page 2)

Problème :

1) Soit $Q(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

a) Comparons $Q(\bar{z})$ et $\overline{Q(z)}$

$Q(\bar{z}) = \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 6\bar{z} - 4$

$\overline{Q(z)} = \overline{z^3 - 4z^2 + 6z - 4}$ or $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ +0,5

$\overline{Q(z)} = \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 6\bar{z} - 4 = Q(\bar{z})$ alors $\boxed{Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}}$

b) Montrons que $1+i$ est une racine de $Q(z) = 0$:

$Q(1+i) = (1+i)^3 - 4(1+i)^2 + 6(1+i) - 4 = -2+2i-8i+6+6i-4$

$\Rightarrow \boxed{Q(1+i) = 0}$ c.q.f.m +0,5

c) Déterminons a, b et c tel que :

$Q(z) = (z-1-i)(az^2+bz+c)$

	1	-4	6	-4
1+i		1+i	-4-2i	4
	1	-3+i	2-2i	0

alors $\boxed{a=1}$; $\boxed{b=-3+i}$

$\boxed{c = 2-2i}$ +0,75

$\boxed{Q(z) = (z-1-i)[z^2+(-3+i)z+2-2i]}$

d) Achevons la résolution de l'équation : $Q(z) = 0$

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1-i)[z^2+(-3+i)z+2-2i] = 0$

$z-1-i = 0$ ou $z^2+(-3+i)z+2-2i = 0$

$z_0 = +1+i$ || $\Delta = (-3+i)^2 - 4(1)(2-2i) = 2i$

Soit $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 & ① \\ x^2-y^2 = 0 & ② \\ 2xy = 2 & ③ \end{cases}$ || ① + ② : $2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

Si $x = 1 \Rightarrow 2(1)y = 2 \Rightarrow y = 1$

$\delta_1 = 1+i$ et $\delta_2 = -1-i$

$z_1 = \frac{3-i-1-i}{2} = 1-i$ et $z_2 = \frac{3-i+1+i}{2} = 2$

$\boxed{S = \{1+i ; 1-i ; 2\}}$ +0,5

* Sous forme exponentielle :

$\to z_0 = 1+i \Rightarrow z_0 = [\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}}$ +0,5

$\to z_1 = 1-i \Rightarrow z_1 = [\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}] \Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}}$ +0,5

$\to z_2 = 2 \Rightarrow z_2 = [2 ; 0] \Rightarrow \boxed{z_2 = 2e^{i0}}$ +0,5

2°) $z_A = 1+i$; $z_B = 1-i$, $z_C = 2$

R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminons :

* $R(B) = B'$

L'écriture complexe de la rotation $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

$\Rightarrow z' - z_0 = e^{i\pi/2}(z - z_0) \Rightarrow z' = iz$

$z'_B = iz_B \Rightarrow \boxed{z'_B = 1+i = z_A}$ +0,5

* $R(C) = C'$

$z'_C = iz_C \Rightarrow \boxed{z'_C = 2i}$ +0,5

b) Démontrons :

$z_0 = 0$; $z_B = 1-i$; $z_A = 1+i$; $z_C = 2$

Ils appartiennent à un même cercle si $\left(\frac{z_C - z_0}{z_C - z_A}\right)\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_0}\right) = b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$

$\frac{z_C - z_0}{z_C - z_A} = \frac{2}{1-i} = 1+i$ || $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_0} = \frac{-2i}{1-i} = 1-i$

$\left(\frac{z_C - z_0}{z_C - z_A}\right)\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_0}\right) = (1+i)(1-i) = 2 \in \mathbb{R}^*$ alors

les points O, B, A et C appartiennent un même cercle +0,5

* Précisons :

$\to$ Centre I du cercle :

Soit I le centre du cercle d'affixe $z_I = x+iy$ tel que $OI^2 = BI^2 = AI^2 = CI^2$

$OI^2 = |z_I - z_0|^2 = |x+iy|^2 = x^2+y^2$

$BI^2 = |z_I - z_B|^2 = |(x-1)+i(y+1)|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$

$AI^2 = |z_I - z_A|^2 = |(x-1)+i(y-1)|^2 = (x-1)^2+(y-1)^2$

$CI^2 = |z_I - z_C|^2 = |(x-2)+iy|^2 = (x-2)^2+y^2$

$OI^2 = CI^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = (x-2)^2+y^2 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$

$OI^2 = BI^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = (x-1)^2+(y+1)^2$ or $x=1$

$\Rightarrow 2y=0 \Rightarrow y=0$ alors $\boxed{z_I = 1}$ +0,5

→ <u>Rayon</u> : r

$r = OI = |z_I - z_0| = |z_I| \Rightarrow \boxed{r = 1\,\text{cm}}$ +0,25

3°) Soit $z' = \dfrac{z-(1+i)}{z-2}$

a) Déterminons $f(A)$ et $f(B)$

* $f(A) = \dfrac{z_A-(1+i)}{z_A-2} = \dfrac{0}{-1+i} \Rightarrow \boxed{f(A)=0}$ +0,25

* $f(B) = \dfrac{z_B-(1+i)}{z_B-2} = \dfrac{-2i}{-1-i} \Rightarrow \boxed{f(B) = 1+i}$ +0,25

b) Déterminons l'affixe de E

$f(E) = C \Leftrightarrow \dfrac{z_E-(1+i)}{z_E-2} = 2 \Rightarrow \boxed{z_E = 3-i}$ +0,5

c) Démontrons que $(AB) \perp (BE)$:

$\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_E} = \dfrac{1-i-1-i}{1-i-3+i} = i$ alors $(AB) \perp (BE)$ +0,5

4) Traçons :