TEST DU 1er TRIMESTRE MATHÉMATIQUES

Série : ***T.S.E***	01/05/2021	*Durée* : 04h00

Exercice 1 : .... (4pts)

1°) Démontrer par récurrence que : (1pt)

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

2°) Trouver tous les couples $(x; y)$ d'entiers naturels non nuls qui vérifient la relation : $2m + 5d = 123$ où $m = \text{PPCM}(x; y)$ et $d = \text{PGCD}(x; y)$. (1pt)

3°) On applique l'algorithme d'Euclide au couple $(a; b)$, la suite des quotients est : 1, 2, 1, 3, 2. Sachant que $\text{PGCD}(a; b) = 504$. Calculer a et b. (1pt)

4°) Soient u et v deux entiers relatifs vérifiant $u \equiv 4[5]$ et $v \equiv 3[5]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $7u^2 - 4v^2 + 2uv$ par 5. (0,5pt)

5°) Soit $\theta \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $Z = \dfrac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + i}$. Montrer que Z est imaginaire pur. (0,5pt)

Exercice 2 : .... (6pts)

Partie A : (4pts)

1°) Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. (0,5pt)

2°) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ ou x et y sont les entiers relatifs.

a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1°), que 87 et 31 sont premiers entre eux. (0,5pt)
Montrer que le couple $(5\,;-14)$ est une solution de l'équation $87u + 31v = 1$. Déduire une solution (x_0, y_0) de (E). (1pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$. (1pt)

c) Application : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100. (1pt)
Indication : On remarquera que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite $(\mathcal{D})$ si et seulement si, le couple $(x, -y)$ vérifie l'équation (E).

Partie B : (2pts)

1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $7p - 4q = 4$. (0,5pt)

2°) Soient A et B deux entiers naturels non nuls tels que :

- $A = \overline{75}$ dans le système de base α et $A = \overline{49}$ dans le système de base β.
- $B = \overline{310}$ dans le système de base α et $B = \overline{125}$ dans le système de base β.

Déterminer α et β, puis écrire A et B dans le système décimal. (1,5pts)

Problème : .... (10pts)

I- Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i$.

1°) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_2 que l'on déterminera. (0,5pt)

c) Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$. (1pt)

2°) On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = i \;;\; b = -1 + i \;;\; c = -2 \;;\; d = -2 - 2i \text{ et } e = -2 - i.$$

a) Placer ces cinq points dans un repère orthonormé et justifier que E est le milieu de [CD]. (1pt)

b) Prouver que les quatre points A, B, C, E sont sur un même cercle que l'on tracera partant du point de rencontre I des trois médiatrices de [AB] ; [BC] et [CE]. (1pt)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique 2 cm)

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$Z_A = 2 \;;\; Z_B = 2 + 3i \;;\; Z_C = 3i \;;\; Z_D = -\frac{5}{2} + 3i \text{ et } Z_E = -\frac{5}{2}$$

1°) Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice. (1pt)

2°) On admet que deux rectangles sont dits semblables, lorsque le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles. Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles semblables. (0,5pt)

3°) **Etude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE.**

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme O en A et A en B. (1pt)

b) En déduire le rapport k, l'angle θ et le centre Ω de la similitude directe S. (0,5pt)

c) Démontrer que la similitude S transforme OABC en ABDE. (1pt)

4°) **Etude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED.**

a) Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte S' transformant O en B et qui laisse A invariant est : $z' = -\frac{3}{2} i \bar{z} + 2 + 3i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z. (1pt)

b) Montrer que S' transforme OABC en BAED. (1pt)

GOOD LUCK !!!

TEST DU 1er TRIMESTRE MATHÉMATIQUES

Série : ***T.S.Exp***	01/05/2021	*Durée* : 03h00

Exercice 1 : .... (7pts)

I- Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i$.

1°) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_2 que l'on déterminera. (0,5pt)

c) Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$. (1pt)

2°) On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = i \ ; \ b = -1 + i \ ; \ c = -2 \ ; \ d = -2 - 2i \ \text{ et } \ e = -2 - i.$$

a) Placer ces cinq points dans un repère orthonormé et justifier que E est le milieu de [CD]. (0,5pt)

b) Prouver que les quatre points A, B, C, E sont sur un même cercle que l'on tracera partant du point de rencontre I des trois médiatrices de [AB] ; [BC] et [CE]. (1pt)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique 2cm)

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$Z_A = 2 \ ; \ Z_B = 2 + 3i \ ; \ Z_C = 3i \ ; \ Z_D = -\frac{5}{2} + 3i \ \text{ et } \ Z_E = -\frac{5}{2}$$

1°) Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice. (1pt)

2°) On admet que deux rectangles sont dits semblables, lorsque le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles. Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles semblables. (0,5pt)

3°) **Etude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE.**

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme O en A et A en B. (1pt)

b) En déduire le rapport k, l'angle θ et le centre Ω de la similitude directe S. (0,5pt)

c) Démontrer que la similitude S transforme OABC en ABDE. (0,5pt)

Exercice 2 : .... (3pts)

1°) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes : (1pt)

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{|x + 2| + 2}$; b) $k(x) = 2x + \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + x}}$

2°) Calculer les limites suivantes : (1,5pts)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi}$; c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$

3°) Soit u la fonction définie par : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1} \\ u(1) = a \end{cases}$, si $x \in \mathbb{R}$-{1}

Déterminer a pour que u soit continue en 1. (0,5pt)

Problème : .... (10pts)

Partie A : (2,25pts)

Soit la fonction g définie par : $g(x) = x^3 - 3x - 8$.

1°) Etudier les variations de g ; puis dresser son tableau de variation. (1pt)

2°) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. (0,5pt)

b) Vérifier que : $\alpha \in]2{,}4 ; 2{,}5[$. (0,25pt)

3°) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x. (0,5pt)

Partie B : (7,75pts)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (1pt)

b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_f$ on a : $f'(x) = \dfrac{x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$. (0,5pt)

2°) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f. (1pt)

3°) a) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + \dfrac{bx+c}{x^2-1}$. (0,75pt)

b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique (Δ). (1pt)

Vérifier en particulier que $(\mathcal{C}_f)$ rencontre (Δ) en un point unique A. (0,25pt)

4°) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$. (0,5pt)

5°) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; -1[$.

a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty ; -1[$ sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de h et celui de sa bijection réciproque h^{-1}. (1pt)

6°) Représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ). (Prendre $\alpha = 2{,}49$) (1,25pts)

GOOD LUCK !!!

①

T.S.E 2020 - 2021

Correction du 1er Trimestre Mathématiques:

Exercice : ①

1°) Démontrons par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{p=1}^{n} (2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$ (+0,5)

$1 + 27 + 125 + \ldots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$

si $n=1$ on a : $1 = 2(1)^4 - 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$ Vraie

si $n=2$ on a : $1 + 27 = 2(2)^4 - 2^2 \Leftrightarrow 28 = 28$ Vraie

Supposons la relation vraie à l'ordre n et démontrons à l'ordre $n+1$

$\underbrace{1 + 27 + 125 + \ldots + (2n-1)^3}_{P(n)} + [2(n+1)-1]^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$

$2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 = 2(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - n^2 - 2n - 1$

$2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$ Vraie

alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n} (2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Si $n=0$ on a : $3 \times 5 + 2 = 17$ divisible par 17.

Si $n=1$ on a : $3 \times 125 + 16 = 391$ divisible par 17.

Supposons la relation vraie à l'ordre n et démontrons à l'ordre $n+1$

$3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \times 5^{2n+1} \times 25 + 2^{3n+1} \times 8$

$= 3 \times 5^{2n+1}(17+8) + 2^{3n+1} \times 8$

$= 3 \times 5^{2n+1} \times 17 + 3 \times 5^{2n+1} \times 8 + 2^{3n+1} \times 8$

$= 17k' + 8(3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$ or $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k''$

$\Rightarrow 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 17k' + 17k'' \times 8 = 17(k' + 8k'')$ avec k' et $k'' \in \mathbb{Z}^2$

$\Rightarrow 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 17k$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. (+0,5)

2°) Trouvons tous les couples $(x;y)$:

$2m + 5d = 123$ soit $x = x'd$ et $y = y'd$ tel que $x' \wedge y' = 1$

on a : $d(2x'y' + 5) = 123 \Rightarrow 2x'y' + 5 = 123/d$ alors $d \in div(123)$

$d \in div(123) = \{1; 3; 41; 123\}$

* Si $d = 1 \Rightarrow 2x'y' = 118 \Rightarrow x'y' = 59$

$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 59 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'd = 1 \times 1 = 1 \\ y = y'd = 59 \times 1 = 59 \end{cases}$ $(1;59);(59;1)$

②

* Si $d = 3 \Rightarrow 2x'y' = 36 \Rightarrow x'y' = 18$

x'	1	2	~~3~~
y'	18	9	~~6~~

$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'd = 1 \times 3 = 3 \\ y = y'd = 18 \times 3 = 54 \end{cases}$ $(3;54);(54;3)$ (+1)

$x' = 2$ et $y' = 9$ on a : $(6;27);(27;6)$

* Si $d = 41 \Rightarrow 2x'y' = -2$ impossible car $(x', y') \in \mathbb{N}^2$

* Si $d = 123 \Rightarrow 2x'y' = -4$ impossible car $(x', y') \in \mathbb{N}^2$

$$\boxed{S = \{(1;59);(59;1);(3;54);(54;3);(6;27);(27;6)\}}$$

3°) Calculons a et b :

quotient (q)	1	2	1	3	2
dividende (a)	a	b	r_1	r_2	r_3
diviseur b	b	r_1	r_2	r_3	r_4
reste (r)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5

On a : $a = b + r_1 \Rightarrow r_1 = a - b$

$r_2 = b - 2r_1$

$r_3 = r_1 - r_2$

$r_4 = r_2 - 3r_3$; $r_5 = r_3 - 2r_4$

or $r_5 = 0$ et $r_4 = 504$

* $r_5 = r_3 - 2r_4 \Rightarrow r_3 = r_5 + 2r_4 \Rightarrow r_3 = 1008$

* $r_4 = r_2 - 3r_3 \Rightarrow r_2 = r_4 + 3r_3 \Rightarrow r_2 = 3528$

* $r_3 = r_1 - r_2 \Rightarrow r_1 = r_3 + r_2 \Rightarrow r_1 = 4536$

* $r_2 = b - 2r_1 \Rightarrow b = r_2 + 2r_1 \Rightarrow \boxed{b = 12600}$ (+0,5)

* $a = b + r_1 \Rightarrow \boxed{a = 17136}$ (+0,5)

4°) Soient $u \equiv 4[5]$ et $v \equiv 3[5]$

Déterminons le reste de la division euclidienne de $7u^2 - 4v^2 + 2uv$ par 5 :

* $u \equiv 4[5] \Rightarrow u^2 \equiv 1[5] \Rightarrow 7u^2 \equiv 2[5]$

* $v \equiv 3[5] \Rightarrow v^2 \equiv 4[5] \Rightarrow 4v^2 \equiv 1[5]$ (+0,5)

alors on aura : $7u^2 - 4v^2 + 2uv \equiv (2 - 1 + 2(4)(3))[5]$

$7u^2 - 4v^2 + 2uv \equiv 0[5]$ alors le reste de la division est 0.

5°) Soit $z = \frac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + i}$

Montrons que z est imaginaire pur :

posons $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - i$ et

$z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - i}{\cos\theta + i\sin\theta + i} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta - i)(\cos\theta - i\sin\theta - i)}{(\cos\theta + i\sin\theta + i)(\cos\theta - i\sin\theta - i)} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{i\cos\theta}{1 + \sin\theta}}$

(+0,5) C.q.f.m

Exercice : 2

Partie : A

1°) Montrons que $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux :

$PGCD(14n+3, 5n+1) = PGCD(9n+2, 5n+1) = PGCD(4n+1, 5n+1)$
$= PGCD(n, 4n+1) = PGCD(3n+1, n) = PGCD(2n+1, n)$
$= PGCD(n+1, n) = 1$

+0,5

$PGCD(14n+3, 5n+1) = 1$ alors ils sont premiers entre eux.

2) On considère $(E) : 87x + 31y = 2$

a) Vérifions que 87 et 31 sont premier entre eux :

Posons $\begin{cases} 14n+3 = 87 \\ 5n+1 = 31 \end{cases}$

$19n = 114$ on a $n = 6 \in \mathbb{Z}$ alors d'après la question 1°) 87 et 31 sont premier entre eux. 0,5

*Montrons que le couple $(5;-14)$ est solut° de l'équation : $87u + 31v = 1$

$87(5) + 31(-14) = 435 - 434 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ alors le couple $(5;-14)$ est solution de l'équation $87u + 31v = 1$ +0,5

* Déduisons une solution (x_0, y_0) de (E) :

on a : $87(5) + 31(-14) = 1$ en multipliant le tout par 2 on aura :

$87(10) + 31(-28) = 2$ alors $\boxed{(x_0, y_0) = (10; -28)}$ +0,5

b°) Déterminons l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$:

$\begin{cases} 87x + 31y = 2 \\ 87x_0 + 31y_0 = 2 \end{cases}$

$87(x - x_0) - 31(-y + y_0) = 0 \Rightarrow 87(x - x_0) = 31(-y + y_0)$

or $87 \wedge 31 = 1$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $31k / x - x_0$ et $87k / -y + y_0$

* $31k = x - x_0 \Rightarrow x = 31k + 10$
* $87k = -y + y_0 \Rightarrow y = -87k - 28$

$\boxed{S = \{(31k+10; -87k-28) / k \in \mathbb{Z}\}}$ +1

c°) Déterminons les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$

$M(x, y) \in (D)$ si $(x, -y)$ est solution de (E)

$87x - 31y - 2 = 0 \Rightarrow 87x + 31(-y) = 2$

alors $(x, -y) = (31k + 10; 87k + 28)$

$0 \leq x \leq 100 \Rightarrow 0 \leq 31k + 10 \leq 100 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$

Les points cherchés ont donc pour coordonnées :

$\boxed{(10; 28), (41; 115) \text{ et } (72; 202)}$ +1

Partie : B

1°) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $7p - 4q = 4$

$7p - 4q = 4 \Rightarrow 3p \equiv 0 [4]$ alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 4k$

en remplaçant p dans l'équation on obtient : $q = 7k - 1$

$\boxed{S = \{(4k; 7k-1) / k \in \mathbb{N}\}}$

2°) Soient A et B deux entiers naturels non nuls :

$A = \overline{75}^{\alpha}$ et $A = \overline{49}^{\beta}$ $(\alpha > 7$ et $\beta > 9)$
$B = \overline{310}^{\alpha}$ et $B = \overline{125}^{\beta}$

Déterminons α et β :

* $A = A \Rightarrow 5 + 7\alpha = 9 + 4\beta \Rightarrow 7\alpha - 4\beta = 4$ par identificat° avec l'équation $7p - 4q = 4$ on a : $(p, q) = (\alpha, \beta)$

$(\alpha, \beta) = (4k; 7k - 1)$

* $B = B \Rightarrow \alpha + 3\alpha^2 = 5 + 2\beta + \beta^2 \Rightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$

on a : $k = 2$ donc $\begin{cases} \alpha = 4k = 4(2) \\ \beta = 7k - 1 = 7(2) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 13 \end{cases}$

+0,5 $\boxed{\alpha = 8}$ et $\boxed{\beta = 13}$ +0,5

$\boxed{A = 61}$ et $\boxed{B = 200}$

+0,5

Problème :

I°) On pose $f(z) = z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i$

1°) a) Montrons que $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 :

Soit $z_1 = ib$

$f(ib) = 0 \Leftrightarrow (ib)^4 + 5(ib)^3 + (11 - 3i)(ib)^2 + (10 - 10i)(ib) - 8i = 0$

$\begin{cases} b^4 - 11b^2 + 10b = 0 & (1) \\ -5b^3 + 3b^2 + 10b - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Résolvons l'éq (1) : $b^4 - 11b^2 + 10b = 0$ on peut dire que $(+1)$ est l'une des solution de cette équation.

Vérifions si (+1) est solution de ②

$-5(1)^3+3(1)^2+10(1)-8=0 \Rightarrow 0=0$ alors (1) est solution de l'éq ②

alors $b=1 \Rightarrow \boxed{z_1=i}$ +0,5

b) Montrons que $f(z)=0$ admet une solution réelle z_2 :

Soit $z_2=a$

$f(a)=0 \Leftrightarrow a^4+5a^3+(11-3i)a^2+(10-10i)a-8i=0$

$$\begin{cases} a^4+5a^3+11a^2+10a=0 & ① \\ -3a^2-10a-8=0 & ② \end{cases}$$

Résolvons l'éq ② : $-3a^2-10a-8=0 \Rightarrow a=-2$ ou $a=-4/3$

* Dans l'éq (1) si $a=-4/3$ on a : $\frac{-200}{81} \neq 0$ alors $-4/3$ n'est pas solution de ①

* Dans l'éq ① si $a=-2$ on a : $0=0$ alors -2 est une solution de ①

alors $\boxed{z_2=-2}$ +0,5

c) Achevons la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z)=0$

	1	5	11-3i	10-10i	-8i
-2		-2	-6	-10+6i	8i
	1	3	5-3i	-4i	0
i		i	-1+3i	4i	
	1	3+i	4	0	

alors $f(z)=(z-i)(z+2)\left[z^2+(3+i)z+4\right]$

$f(z)=0 \Leftrightarrow (z-i)(z+2)\left[z^2+(3+i)z+4\right]=0$

$z-i=0$ | $z+2=0$ | ~~$z^2+(3+i)z+4=0$~~

$z_1=i$ | $z_2=-2$ |

$z^2+(3+i)z+4=0$

$\Delta=(3+i)^2-4(4)=-8+6i$

Soit $\delta=x+iy$ tel que $\Delta=\delta^2$

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta|=10 & ① \\ x^2-y^2=-8 & ② \\ 2xy=6 & ③ \end{cases}$$

① + ② : $2x^2=2 \Rightarrow x=\pm 1$

si $x=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow \delta_1=1+3i$

si $x=-1 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow \delta_2=-1-3i$

$z_3=\frac{-(3+i)-1-3i}{2}=-2-2i$

$z_4=\frac{-(3+i)+1+3i}{2}=-1+i$

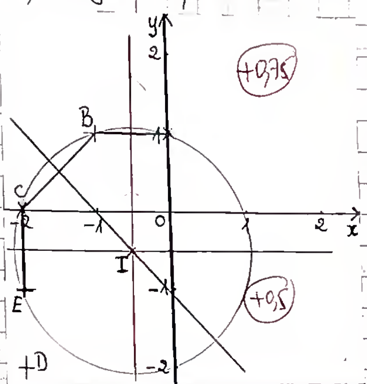
$\boxed{S=\{i\,;-2\,;-2-2i\,;-1+i\}}$ +1

2) On considère les points : $z_A=a=i \Rightarrow A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$z_B=b=-1+i \Rightarrow B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ || $z_D=d=-2-2i \Rightarrow D\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$z_C=c=-2 \Rightarrow C\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ || $z_E=e=-2-i \Rightarrow E\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

a) Plaçons ces points :



* Justifions que E est milieu de [CD]

$z_E=\frac{z_C+z_D}{2}=\frac{-2-2-2i}{2}$

$\boxed{z_E=-2-i}$ alors E est milieu de [CD] +0,25

b) Prouvons que les points A, B, C et E sont sur un même cercle :

$\frac{z_A-z_C}{z_A-z_E}\times\frac{z_B-z_E}{z_B-z_C}=b\in\mathbb{R}^*$

$\frac{z_A-z_C}{z_A-z_E}\times\frac{z_B-z_E}{z_B-z_C}=\left(\frac{3-i}{4}\right)\left(\frac{3+i}{2}\right)=\frac{5}{4}\in\mathbb{R}^*$ alors A, B, C, E sont sur un même cercle de centre $I\left(-1/2\,;-1/2\right)$ et de rayon $r=IA=\frac{\sqrt{10}}{2}$ cm +0,5

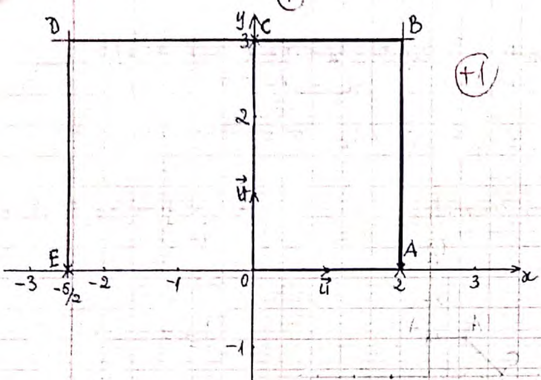
II) $z_A=a=2$ || $z_D=d=-\frac{5}{2}+3i$

$z_B=b=2+3i$ ||

$z_C=c=3i$ || $z_E=e=-\frac{5}{2}$

1) Plaçons les point A, B, C, D et E

(7)



(+1)

2°) Démontrons que OABC et ABDE sont deux rectangles semblables;

* rectangle OABC ‖ Longueur $= AB = |z_B - z_A| = 3$ cm
  largeur $= AO = |z_O - z_A| = 2$ cm

$\Rightarrow \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{3}{2}$

* rectangle ABDE ‖ Longueur $= AE = |z_E - z_A| = 9/2$ cm $\Rightarrow \dfrac{L'}{\ell'} = \dfrac{9/2}{3} = \dfrac{3}{2}$
  largeur $= AB = |z_B - z_A| = 3$ cm

alors $\boxed{\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{L'}{\ell'} = \dfrac{3}{2}}$ c.q.f.d (+0,5)

3°) Etude d'une similitude directe;

a) Déterminons l'écriture complexe de la similitude S : $z' = az + b$

$O \xrightarrow{S} A$

O	A
A	B

$\begin{cases} z_A = a z_O + b \\ z_B = a z_A + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 2a + b = 2 + 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{3}{2} i \end{cases}$

alors $\boxed{z' = \frac{3}{2} i z + 2}$ (+1)

b) Déduisons les éléments caractéristiques; (+0,25)

* Rapport : $k = |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{k = 3/2}$
* Angle : $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$ (+0,25)
* Centre : $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ $\boxed{z_\Omega = \frac{8}{13} + \frac{12}{13} i}$

(8)

4°) Etude d'une similitude indirecte

a) Montrons que l'écriture complexe de la similitude indirecte S' est : $z' = -\frac{3}{2} i \bar{z} + 2 + 3i$

$O \xrightarrow{S'} B$

O	B
A	A

$\begin{cases} z_B = a \bar{z}_O + b \\ z_A = a \bar{z}_A + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 + 3i \\ 2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 + 3i \\ a = -\frac{3}{2} i \end{cases}$

alors $\boxed{z' = -\frac{3}{2} i \bar{z} + 2 + 3i}$ c.q.f.m (+1)

b) Montrons que S' transforme OABC en BAED

S' transforme OABC en BAED

si

O	B
A	A
B	E
C	D

* $z_B = -\frac{3}{2} i \bar{z}_O + 2 + 3i \Rightarrow z_B = 2 + 3i$
* $z_A = -\frac{3}{2} i \bar{z}_A + 2 + 3i \Rightarrow z_A = 2$
* $z_E = -\frac{3}{2} i \bar{z}_B + 2 + 3i \Rightarrow z_E = -\frac{5}{2}$
* $z_D = -\frac{3}{2} i \bar{z}_C + 2 + 3i \Rightarrow z_D = -\frac{5}{2} + 3i$

Alors S' transforme OABC en BAED (+1)

3°) b) Démontrons que S transforme OABC en ABDE

S transforme OABC en ABDE

si

O	A
A	B
B	D
C	E

* $z_A = \frac{3}{2} i z_O + 2 \Rightarrow z_A = 2$
* $z_B = \frac{3}{2} i z_A + 2 \Rightarrow z_B = 2 + 3i$
* $z_E = \frac{3}{2} i z_C + 2 \Rightarrow z_E = -\frac{5}{2}$
* $z_D = \frac{3}{2} i z_B + 2 \Rightarrow z_D = -\frac{5}{2} + 3i$

Alors S transforme OABC en ABDE (+1)

TS Exp

Correction du 1er Trimestre Mathématique: 2020-2021

Exercice : 1

I°) On pose $f(z) = z^4 + 5z^3 + (11-3i)z^2 + (10-10i)z - 8i$

1) a) $\boxed{z_0 = i}$ +0,5

b) $\boxed{z_2 = -2}$ +0,5

c) $\boxed{S = \{i ; -2 ; -2-2i ; -1+i\}}$ +1

2) a) (Voir page 6) +0,25 E est milieu +0,25

b) (Voir page 6) +0,5 Tracé du cercle +0,5

II) 1) (Voir page 7) +1

2) (Voir page 7) +0,5

3) a) (Voir page 7) +1

b) (Voir page 7) +0,5

c) (Voir page 8) +0,5

Exercice : 2

1°) Déterminons le domaine de définition :

a) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{|x+2|+2} \Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[}$ +0,5

b) $k(x) = 2x + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+x}} \Rightarrow \boxed{D_k =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[}$ +0,5

2) Calculons les limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = 1}$ +0,5

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi} = \dfrac{0}{0}$ "FI"

posons $t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$

si $x \to \frac{\pi}{3}$ alors $t \to 0$

$\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t}{3t} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi} = \dfrac{1}{3}}$ +0,5

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(-x)+1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(-x)-(-1)}{x-\frac{\pi}{2}}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\cos(-x) = 0.$

$\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}} = 0}$ +0,5

3°) Soit u définie par : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}, & \text{si } x \in \mathbb{R}-\{1\} \\ u(1) = a \end{cases}$

Déterminons a :

$\lim\limits_{x\to1} u(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \dfrac{-1}{2}$

alors $\boxed{a = -\dfrac{1}{2}}$ +0,5

Problème :

Partie : A

Soit $g(x) = x^3 - 3x - 8$

1°) Les variations de g :

$D_g =]-\infty ; +\infty[$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

+0,25

dérivée : $g(x) = x^3 - 3x - 8 \Rightarrow \boxed{g'(x) = 3x^2 - 3}$ +0,25

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 \Rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+			
$g(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	-10	↗	0	↗	$+\infty$

+0,5

* $\forall x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ $g'(x) > 0$ alors g est croissante.
* $\forall x \in [1 ; -1]$ $g'(x) < 0$ alors g est décroissante.

(11)

2) a) g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors elle réalise une bijection sur $[1;+\infty[\longrightarrow [-10;+\infty[$. Or $0 \in [-10;+\infty[$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α. +0,5

b) Vérifions.

$\left.\begin{matrix} g(2,4) = -1,37 \\ g(2,5) = 0,125 \end{matrix}\right\}$ $g(2,4) \times g(2,5) < 0$ alors $\alpha \in]2,4;2,5[$ +0,25

3) Le signe de $g(x)$:

* $\forall x \in]-\infty;\alpha]$ $g(x)$ est négative
* $\forall x \in [\alpha;+\infty[$ $g(x)$ est positive

+0,5

Partie: B

Soit $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-1}$

1) a) $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1,1[\cup]1;+\infty[$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

+1

b) Montrons que $f'(x) = \dfrac{x \times g(x)}{(x^2-1)^2}$

$f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(3x^2)(x^2-1) - 2x(x^3+4)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^2}$

alors $\boxed{f'(x) = \dfrac{x \times g(x)}{(x^2-1)^2}}$ c.q.f.m +0,5

2) Le signe de $f'(x)$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x \times g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $g(x) = 0$

$x = 0$ ou $x = \alpha$

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

+0,75

* $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \cup [\alpha;+\infty[$ $f'(x) > 0$
* $\forall x \in [0;1[\cup]1;\alpha]$ $f'(x) < 0$

+0,25

(12)

3) a) Déterminons a, b et c tels que $f(x) = ax + \dfrac{bx+c}{x^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^3+4 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ x+4 & \end{array}$$

alors $\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{matrix}}$ $\Rightarrow \boxed{f(x) = x + \dfrac{x+4}{x^2-1}}$ +0,75

b) Positions relative:

Déterminons l'asymptote (Δ):

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+4}{x^3-x} = 1$ $a=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x + \dfrac{x+4}{x^2-1} - x\right] = 0$ alors $(\Delta): y = x$

$f(x) - y = \dfrac{x+4}{x^2-1}$ $\left\{\begin{matrix} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1 \end{matrix}\right.$

x	$-\infty$	-4		-1		1		$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	$-$		$+$		$-$		$+$	
position	$(\Delta)/(\mathcal{C}_f)$		$(\mathcal{C}_f)/(\Delta)$		$(\Delta)/(\mathcal{C}_f)$		$(\mathcal{C}_f)/(\Delta)$	

+1

Ils se coupent au point $A\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ +0,25

4) Vérifions que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

$f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3+4}{\alpha^2-1}$ or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \left|\begin{matrix} \alpha^3 = 8+3\alpha \\ \alpha^2 = \dfrac{8+3\alpha}{\alpha} \end{matrix}\right.$

$f(\alpha) = \dfrac{8+3\alpha+4}{\dfrac{8+3\alpha}{\alpha} - 1} = \dfrac{3\alpha+12}{\dfrac{2\alpha+8}{\alpha}} = \dfrac{3\alpha^2+12\alpha}{2\alpha+8} = \dfrac{3\alpha\cancel{(\alpha+4)}}{2\cancel{(\alpha+4)}}$

$\Rightarrow \boxed{f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha}$ c.q.f.v +0,5

5) a) h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ alors elle réalise une bijection sur $]-\infty;-1[\rightarrow]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$. +0,5

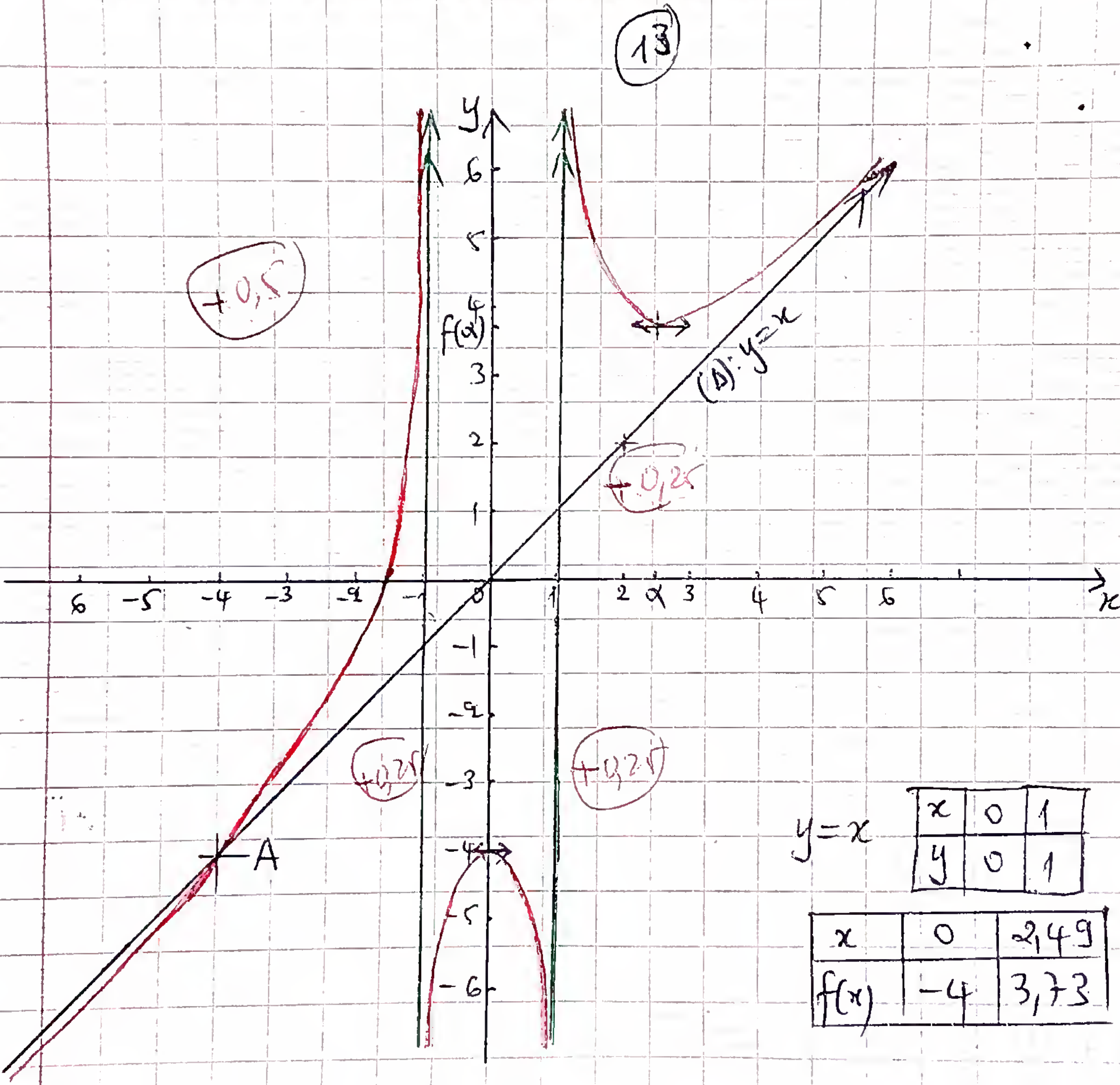
b)

x	$-\infty$		-1
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

+0,5

x	$-\infty$		$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$		$+$	
$h^{-1}(x)$	$-\infty$	↗	-1

+0,5



$y = x$

x	0	1
y	0	1

x	0	2,49
$f(x)$	-4	3,73