DEVOIR N°1 DE MATHÉMATIQUES

Série : **T.S.E**	Durée : **03h**

27/10/2019

EXERCICE 1: (6pts)

1°) Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :**(2,5pts)**

$$z_1 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(-1+i\sqrt{3})}{(1+i)^3} \ ; z_2 = 1 - e^{-i\alpha} \ ; z_3 = 1 + e^{-i\alpha} \ ; P = \frac{z_2}{z_3} \ ;$$

$$T = z_2 \times z_3$$

2°) Écrire sous forme algébrique les solutions de l'équation : $Z^4 = 1$. **(1pt)**

En déduire les solutions de l'équation : $(z-i)^4 = (3z-2i)^4$. **(1,5pts)**

3°) Linéariser : $A = \cos(6x) \bullet sin^4(6x)$ **(1pt)**

EXERCICE 2: (6pts)

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\begin{cases} 2z_1z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ **(1pt)** ; b) $(1+i)z + 2i\bar{z} = 3 - i$ **(1pt)**

II) $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i.$$

1) Montrer que $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1. **(0,5pt)**

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$; **(1pt)**

b) Calculer le module et l'argument de chacune des solutions de l'équation $f(z) = 0$. **(1,5pts)**

3) On désigne z_1 ; z_2 ; z_3 les solutions de l'équation $f(z) = 0$; z_2 étant celle d'argument $\frac{\pi}{2}$. Vérifier que : $-\frac{1}{2}z_1z_3 = iz_2$ **(1pt)**

EXERCICE 3: (8pts)

1°) Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct (O, u, v).

a) Résoudre l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. **(1pt)**

b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure. **(1pt)**

c) Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré. **(1pt)**

2°) Soit R la symétrie de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la même figure que M, N. **(0,5pt)**
Calculer les affixes de R et S. **(1,5pts)**
3°) On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
a) Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et que $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$. **(0,5pt)**
b) Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$. **(1pt)**
c) Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ **(1pt)**
d) Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS. **(0,5pt)**