ARITHMÉTIQUE

Exercice 1 :

1°) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

2°) Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

3°) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{r}=3025$ et $\mathrm{q}=50$.Rétablir la division.

Exercice 2 :

1°) Démontrer par récurrence que :

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1) = n^2$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

d) $\forall\, n \geq 1 : \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N} : 3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5.

f) $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

h) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

i) $\forall\, n \geq 5 : 2^n > 5(n+1)$

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

a) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

b) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

c) $4^n+15n-1$ est divisible par 9.

d) n^7-n est divisible par 7.

e) $n(n^4-1)$ est multiple de 5.

Exercice 3 :

I/ 1°) Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de : 5^n par 11 ; 2^n par 5 ; 6^n par 11

2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de :

2^{2019} par 5 ; $7^{2002}+2$ par 9 ; 11^{1999} par 7

II/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $14x+21y=7$; $5\mathrm{p}+3\mathrm{q}=7$; $4u-8v=3$

b) $11u - 7v = -4$; $7x - 21y = 4$; $34p - 15q = 2$

c) $5x + 3y = 7$; $11x - 26y = 1$; $2x - 3y = 3$

III/1°) On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?

2°) Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Exercice 4 :

1) Soit l'entier naturel $\mathrm{N} = 1323$.

a) Décomposer N en produit de facteur premier.

b) Déterminer le nombre de diviseurs de N et trouver tous les diviseurs de N.

c) Écrire N dans le système de numération de base 2 et 3.

2) Déterminer n entier naturel pour que $A_n = n^2 + n + 12$ soit divisible par $B_n = n + 1$.

Exercice 5 :

I-Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations et systèmes suivants :

a) $5x \equiv 1[6]$; $15x \equiv 25[35]$; $424 + 161x \equiv 0[16]$; $x^2 + 2x \equiv 6[9]$

b) $x \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$: $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$

$x \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$: $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$

$x \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$: $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$; $\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$; $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \equiv 3[11] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$

II/1°) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans la base dix. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.

2°) Un nombre s'écrit $\overline{724x5}$ dans le système décimal. Déterminer x pour qu'il soit divisible par 9.

3°) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et par 11.

4°) Déterminer les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 28$

Exercice 6 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$les systèmes suivants:

a) $\begin{cases} x + y = 60 \\ \mathrm{PGCD}(x\,, y) = 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x, y) = 27 \\ \mathrm{PPCM}(x, y) = 108 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x, y) = 13 \\ x \cdot y = 14196 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathrm{PPCM}(x, y) = 168 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + y = 56 \\ \mathrm{PPCM}(x, y) = 105 \end{cases}$; f) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x; y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

g) $\mathrm{PPCM}(x; y) + \mathrm{PGCD}(x; y) = y + 9$; h) $2(x \vee y) + 3(x \wedge y) = 78$

i) $\begin{cases} x+y=651 \\ \frac{x\vee y}{x\wedge y}=108 \end{cases}$; j) $\begin{cases} x\vee y=120 \\ x^2+y^2=801 \end{cases}$; k) $\begin{cases} x+y=96 \\ \mathrm{PGCD}(x;y)=4 \end{cases}$

2°) Déterminer l'ensemble des couples (a,b) d'entiers naturels tels que :
PPCM$(a\,,b)=m$; PGCD$(a,b)=d$ vérifiant les relations suivantes

a) $\begin{cases} m-3d=108 \\ 10<d<15 \end{cases}$; b) $2m+3d=11$; c) $m^2-3d^2=1998$

d) $\begin{cases} m+3d=276 \\ 10<d<30 \end{cases}$

Exercice 7 :

I- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a=n^3-n^2-12n \text{ et } b=2n^2-7n-4$$

1°) Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2°) On pose $\alpha=2n+1$ et $\beta=n+3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Établir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontre que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.

3°) Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

4°) a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 8 :

I/ Un général décide de compter son troupe de soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 16 il reste 3 soldats, il leur ordonne de se ranger en rang de 25, il reste 5 soldats sachant que la troupe est constituée de moins de 400 soldats combien y'a-t-il de soldats ?

II/ 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (p,q) : $11p-7q=1$.

2) a) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ?

b) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200.

Exercice 9 :

I-) N et M sont deux nombres tels que : N s'écrit $\overline{1a3a}^4$ et M s'écrit $\overline{bca35}^7$.

1°) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 6^n par 11

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x+y=46$

3°) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple $(b\,;c)$ est solution de $7x+y=46$. Donner les écritures en base 4 de N et en base 7 de M.

4°) Déterminer l'entier naturel n tel que $\mathrm{M}^n\equiv 3[5]$.

5°) a) Écrire dans le système décimal M et N.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues a et b.

$$\begin{cases} \mathrm{PPCM}(a,b)=\mathrm{M}-\mathrm{N} \\ \mathrm{PGCD}(a,b)=5\mathrm{N}+14 \end{cases}$$

Exercice 10 :

On note n un entier non nul, p l'entier naturel $3\mathrm{n}+1$ et q l'entier naturel $5\mathrm{n}-1$.

1°) Démontrer que le PGCD de p et q est diviseur de 8.

2°) Pour quelles valeurs de n, ce PGCD est-il égal à 8 ? Calculer alors le PPCM de p et q.

Exercice 11 :

1°) Trouver trois entiers naturels a, b, c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que : $a \times b \times c = 495$.

2°) x, y, z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $\mathrm{A} = \overline{x13y8z}$ en base dix. Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquelles A est divisible par 495.

Exercice 12 :

Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°) Déterminer un couple d'entier $(\alpha; \beta)$solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.

2°) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation ci-dessous puis résoudre complètement cette équation : $23u - 7v = -6$.

3°) Démontrer que x est solution de (S) si et seulement si il existe $(u; v)$ couple d'entier vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

4°) Déterminer la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 16.

Exercice 13 :

1°) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_1) : $11x + 8y = 79$.

a) Montrer que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3[11]$

b) Résoudre alors l'équation (E_1).

2°) Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 48000 F.

- Le prix d'une pièce du premier lot est de 4800 F.
- Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 3600 F.
- Le prix d'une pièce du troisième lot est de 400 F.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 14 :

1°) a) Montrer en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $324u + 245v = 1$.

b) Déduire de ce qui précède une solution particulière $(x_0 \; ; \; y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) : $324u - 245v = 7$ et résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation

2°) On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$ où n est un entier naturel strictement supérieure à 2.

a) Montrer que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$ où a et b sont deux entiers naturels à déterminer.

b) Pour quelles valeurs de n, $A(n)$ est-il un entier naturel ?

c) Pour quelles valeurs de n, $A(n)$ est-il irréductible ?

3°) Déterminer l'entier naturel n tel que $2 \times 3^n + 1$ soit divisible par 11.

4°) Trouver les couples d'entiers naturels $(a\,,b)$ tels que :

$$2m - d = 220 \text{ où } m = a \vee b \text{ et } d = a \wedge b.$$

Exercice 15 :

1°) Déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b $(a < b)$ tels que :

$m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$ vérifient $\begin{cases} m + d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$

2°) Effectuer la division euclidienne de a par b pour $a = -532$ et $b = -71$.

3°) Effectuer les opérations suivantes :

$$\overline{\text{FACE}}^{16} - \overline{\text{BEC}}^{16} \;;\; \overline{3421}^{5} + \overline{240}^{5} \;;\; \overline{3421}^{5} \times \overline{230}^{5}$$

Exercice 16 :

I/ 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n.
En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.

b) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.
Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2. a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.

b) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2[15]$.

c) Résoudre l'équation : $(x\,,y) \in \mathbb{Z}^2 : 21590x + 9525y = 1270$.

d) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

II/ On considère l'entier naturel **A** qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminer x pour que :

a) **A** soit divisible par six.

b) **A** soit divisible par cinq.

c) En déduire qu'il existe x tel que **A** soit divisible par trente.

2°) On donne à x la valeur zéro, déterminer l'écriture décimale de **A**. Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positifs de **A** ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de **A** qui sont premiers avec trois ?

Exercice 17 :

I/ 1°) Montrer que : $4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$.

2°) En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égale à 5 le nombre $\overline{40301}$ est divisible par $\overline{211}$.

3°) Que vaut le quotient de la division de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$ quand $b = 9$?

II/ Dans le système de numération de base 3, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^{3}$.

1°) Dans quel système de numération n ce nombre s'écrit : $\overline{224}^{n}$?

2°) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$.

3°) Soit $\boldsymbol{a}$ un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère les nombres $\text{N} = 2(\boldsymbol{a} - 1)$ et $\text{N}' = (\boldsymbol{a} - 1)^2$. Écrire N et N′ dans le système de base $\boldsymbol{a}$.

4°) Démontrer que dans tout système de numération de base $\boldsymbol{b}$ (avec **b**≥4) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x.

III/1°) On veut recouvrir une surface rectangulaire de $4{,}75m$ sur $3{,}61m$ avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

2°) Soit le nombre $\boldsymbol{n}$ qui s'écrit dans la base dix, $\boldsymbol{n} = y17x35$; trouver x et y pour que $\boldsymbol{n}$ soit divisible par 9 et 11.

Exercice 18 :

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1°) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4{,}54m$ et de largeur $3{,}75m$. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.

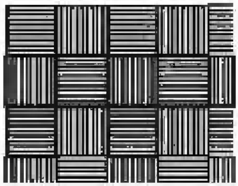

Figure 1

Calculer le nombre de carreaux non découpées qui auront été posés.

2°) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55m$ et de largeur $3{,}85m$. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine ?

3°) On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24cm$ et de largeur $15cm$.

a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.

b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15 inférieurs à 400.

c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

Exercice 19 :

I/ Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Rokia, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Rokia répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2°) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3°) a) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteur premiers.

b) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le $\mathrm{PGCD}(m_1 ; m_2)$

4°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1\mathrm{u} + m_2\mathrm{v} = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

II/ Le vieux Moussa a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :
* Le 1^{er} chiffre est pair ;
* La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
* Le troisième est la différence des deux premiers (le 1^{er} *moins le* $2^{\text{ème}}$) ;
* Le 1^{er} chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
* Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

<u>Exercice 20</u> :

On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\,, y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1°) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2°) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\,, b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3°) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;\, y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes a dépensé 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe.

<u>Exercice 21</u> :

1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 631$.

2°) a) Trouver le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.

b) Soit l'entier naturel N = $999\ 888\ 777\ 666\ 555\ 444\ 333\ 222\ 111$.

- Montrer que N peut s'écrire en fonction de 111.
- Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7

<u>Exercice 22</u> :

I/ 1) On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525\ m$ et $285\ m$. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculer :

a) La distance comprise entre deux arbres.

b) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

2) On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

a) Vérifie que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$.

b) Résous alors l'équation $(\boldsymbol{E})$.

c) En déduis le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de $(\boldsymbol{E})$ tel que : $0 \leq \mathrm{p} \leq 25$

II/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}}{2}$ (avec $\mathrm{a} \in \mathbb{N}$).

1°) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.

2°) On pose $n = 3$. $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?
Étudier la réciproque de la propriété **1°)**.

CORRIGÉS :

1°) Les valeurs possibles de b et r sont : $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

$a = 900\,;q = 14$

On a : $a = bq + r \Rightarrow 900 = 14b + r \Leftrightarrow r = 900 - 14b$

$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ r = 900 - 14b \end{cases}$; en remplaçant r dans l'encadrement

On aura $\begin{cases} 0 \leq 900 - 14b \\ 900 - 14b < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 64{,}28 \\ b > 60 \end{cases} \Leftrightarrow 60 < b \leq 64{,}28$

donc $b \in \{61; 62; 63; 64\}$, pour r on remplace les différentes valeurs de b dans $r = 900 - 14b$.

* Si $b = 61 \Rightarrow r = 900 - 14(61) \Leftrightarrow \boxed{r = 46\,;b = 61}$
* Si $b = 62 \Rightarrow r = 900 - 14(62) \Leftrightarrow \boxed{r = 32\,;b = 62}$
* Si $b = 63 \Rightarrow r = 900 - 14(63) \Leftrightarrow \boxed{r = 18\,;b = 63}$
* Si $b = 64 \Rightarrow r = 900 - 14(64) \Leftrightarrow \boxed{r = 4\,;b = 64}$

2°) Déterminons les entiers naturels n : $\begin{array}{c|c} n & 16 \\ \hline r & q \end{array}$

$r = q^2$

$\begin{cases} 0 \leq r < b \text{ or } b = 16 \\ n = 16q + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq q^2 < 16 \\ n = 16q + q^2 \end{cases}$

$0 \leq q^2 < 16 \Rightarrow 0 \leq q < 4$ donc $q \in \{0; 1; 2; 3\}$

* Si $q = 0 \Rightarrow n = 16(0) + (0)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 0\,;q = 0}$
* Si $q = 1 \Rightarrow n = 16(1) + (1)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 17\,;q = 1}$
* Si $q = 2 \Rightarrow n = 16(2) + (2)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 36\,;q = 2}$
* Si $q = 3 \Rightarrow n = 16(3) + (3)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 57\,;q = 3}$

3°) Rétablissons la division : $\mathrm{a + b + r = 3025}$ et $\mathrm{q = 50}$

Or $\mathrm{a = bq + r}$ et $\mathrm{0 \leq r < b}$

$$\mathrm{a = 50b + r \Rightarrow 51b + 2r = 3025 \Rightarrow \boxed{r = \frac{3025-51b}{2}}}$$

$$\mathrm{0 \leq r < b}$$

$$\mathrm{0 \leq \frac{3025-51b}{2} < b}$$

$$\mathrm{0 \leq 3025 - 51b < 2b}$$

$$\begin{cases} \mathrm{0 \leq 3025 - 51b} \\ \mathrm{3025 - 51b < 2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{51b \leq 3025} \\ \mathrm{53b > 3025} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{b \leq 59{,}31} \\ \mathrm{b > 57{,}07} \end{cases}$$

donc $\mathrm{57{,}07 < b \leq 59{,}31}$; alors $\mathrm{b} \in \{58; 59\}$

* Si $\mathrm{b = 58 \Rightarrow r = \frac{3025-51(58)}{2} = \frac{67}{2}} \notin \mathbb{N}$
* Si $\mathrm{b = 59 \Rightarrow r = \frac{3025-51(59)}{2} = 8 \Rightarrow \boxed{b = 59\,;r = 8}}$

On a : $\mathrm{a = 50b + r = 50(59) + 8 \Rightarrow \boxed{a = 2958}}$

Exercice 2 :

1°) Démontrons par récurrence :

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Si $n=1$, on a : $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{1+2+3+\cdots\cdots+n}_{P(n)} + \underbrace{n+1}_{P(n+1)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Or $P(n)+P(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$P(n)+P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$; Alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1) = n^2$

Si $n=1$, on a : $1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}_{P(n)} + \underbrace{2n+1}_{P(n+1)} = (n+1)^2$$

Or $P(n)+P(n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

$P(n)+P(n+1) = (n+1)^2$; Alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1) = n^2$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 6+24+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Si $n=1$, on a : $6 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} \Leftrightarrow 6 = 6$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{6+24+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)}_{P(n)} + \underbrace{(n+1)(n+2)(n+3)}_{P(n+1)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Or $P(n)+P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)+4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$P(n)+P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$; Alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 6+24+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

d) $\forall\, n \geq 1 : \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Si $n=1$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Vraie

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}_{P(n)}+\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{P(n+1)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Or $P(n)+P(n+1)=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$

$P(n)+P(n+1)=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$; alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n\geq 1: \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5

Si $n=0$, on a : $3^2+2^4=25$; 25 est divisible par 5 Vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$3^{3(n+1)+2}+2^{(n+1)+4}=3^{3n+2}\times3^3+2^{n+4}\times2=3^{3n+2}\times27+2^{n+4}\times2$
$=3^{3n+2}\times(25+2)+2^{n+4}\times2=2(3^{3n+2}+2^{n+4})+5\times5\times3^{3n+2}$

Puisque $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5, il existe un nombre k tel que :
$3^{3n+2}+2^{n+4}=5k$ et il existe k' tel que : $5\times5\times3^{3n+2}=5k'$.

D'où $3^{3(n+1)+2}+2^{(n+1)+4}=2\times5k+5k'=5(2k+k')$ est divisible par 5 vraie.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5.

2°) <u>Démontrons</u> :

a) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

$3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11 si

$3^{n+3}-4^{4n+2}\equiv0[11]\Leftrightarrow 3^n\times3^3-(4^4)^n\times4^2\equiv0[11]\Leftrightarrow 3^n\times5-3^n\times5\equiv0[11]$

$0\equiv0[11]$ alors $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

b) $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

* <u>Première méthode démonstration avec la congruence modulo</u> :

$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17 si

$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv0[17]\Leftrightarrow(3\times(5^2)^n\times5+(2^3)^n\times2)\equiv0[17]$

$(3\times8^n\times5+8^n\times2)\equiv0[17]\Leftrightarrow17(8^n)=17k\equiv0[17]$

alors $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

* <u>Deuxième méthode démonstration par récurrence</u> :

Si $n=0$, on a : $3\times5^1+2^1=17$

17 est divisible par 17 Vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$3\times5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=3\times5^{2n+1}\times5^2+2^{3n+1}\times2^3$
$=3\times5^{2n+1}\times25+2^{3n+1}\times8$
$=3\times5^{2n+1}\times(17+8)+2^{3n+1}\times8$
$=17(3\times5^{2n+1})+8(3\times5^{2n+1}+2^{3n+1})$

Puisque $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17, il existe un nombre k tel que : $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k$ et il existe k' tel que : $17(3\times5^{2n+1})=17k'$

D'où $3\times5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=17k'+17k\times8=17(k'+8k)$ est divisible par 17 vraie. Alors $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

c) $4^n+15n-1$ est divisible par 9.

* <u>Premier méthode avec le tableau</u> :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4^n + 15n - 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tous les restes sont nuls alors $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

* Deuxième méthode avec la congruence modulo :

$4^0 \equiv 1[9]$; $4^1 \equiv 4[9]$; $4^2 \equiv 7[9]$; $4^3 \equiv 1[9]$

La période est 3 :

- Pour $n = 3k$,

On a : $\begin{cases} 4^n = 4^{3k} \equiv 1[9] \\ 15n = 15(3k) \equiv 0[9] \\ -1 \equiv -1[9] \Rightarrow -1 \equiv 8[9] \end{cases} \Rightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 1 + 0 + 8[9] \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$

- Pour $n = 3k + 1$,

On a : $\begin{cases} 4^n = 4^{3k+1} \equiv 4[9] \\ 15n = 15(3k+1) \equiv 6[9] \\ -1 \equiv -1[9] \Rightarrow -1 \equiv 8[9] \end{cases} \Rightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 4 + 6 + 8[9] \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$

- Pour $n = 3k + 2$,

On a : $\begin{cases} 4^n = 4^{3k+2} \equiv 7[9] \\ 15n = 15(3k+2) \equiv 3[9] \\ -1 \equiv -1[9] \Rightarrow -1 \equiv 8[9] \end{cases} \Rightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 7 + 3 + 8[9] \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$

Tous les restes sont nuls alors $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

d) $n^7 - n$ est divisible par 7.

n	0	1	2	3	4	5	6
$n^7 - n$	0	0	0	0	0	0	0

Tous les restes sont nuls alors $n^7 - n$ est divisible par 7

Exercice 3 :

I/ 1°) Déterminons suivants les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne :

* De 5^n par 11 :

$5^0 \equiv 1[11]$	La période est 5 donc :
$5^1 \equiv 5[11]$	- Pour $n = 5k$, on a : $5^{5k} \equiv 1[11]$
$5^2 \equiv 3[11]$	- Pour $n = 5k + 1$, on a : $5^{5k+1} \equiv 5[11]$
$5^3 \equiv 4[11]$	- Pour $n = 5k + 2$, on a : $5^{5k+2} \equiv 3[11]$
$5^4 \equiv 9[11]$	- Pour $n = 5k + 3$, on a : $5^{5k+3} \equiv 4[11]$
$5^5 \equiv 1[11]$	- Pour $n = 5k + 4$, on a : $5^{5k+4} \equiv 9[11]$

Les restes de la division de 5^n par 11 sont : $1; 3; 4; 5; 9$.

* De 2^n par 5 :

$2^0 \equiv 1[5]$	La période est 4 donc :
$2^1 \equiv 2[5]$	- Pour $n = 4k$, on a : $2^{4k} \equiv 1[5]$
$2^2 \equiv 4[5]$	- Pour $n = 4k + 1$, on a : $2^{4k+1} \equiv 2[5]$
$2^3 \equiv 3[5]$	- Pour $n = 4k + 2$, on a : $2^{4k+2} \equiv 4[5]$
$2^4 \equiv 1[5]$	- Pour $n = 4k + 3$, on a : $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

Les restes de la division de 2^n par 5 sont : $1; 2; 3; 4$.

2°) <u>Déterminons le reste de la division euclidienne</u> :

* <u>De 3^{2019} par 5</u> :

$3^0 \equiv 1[5]$	La période est 4 donc :
$3^1 \equiv 3[5]$	- Pour $n = 4k$, on a : $3^{4k} \equiv 1[5]$
$3^2 \equiv 4[5]$	- Pour $n = 4k+1$, on a : $3^{4k+1} \equiv 3[5]$
$3^3 \equiv 2[5]$	- Pour $n = 4k+2$, on a : $3^{4k+2} \equiv 4[5]$
$3^4 \equiv 1[5]$	- Pour $n = 4k+3$, on a : $3^{4k+3} \equiv 2[5]$

La division euclidienne de 2019 par 4 nous donne : $2019 = 4(504) + 3 = 4k + 3$ or $3^{4k+3} \equiv 2[5]$ alors le reste de la division euclidienne de 3^{2019} par 5 est 2.

* <u>De 11^{1999} par 7</u> :

$11^0 \equiv 1[7]$	La période est 3 donc :
$11^1 \equiv 4[7]$	- Pour $n = 3k$, on a : $11^{3k} \equiv 1[7]$
$11^2 \equiv 2[7]$	- Pour $n = 3k+1$, on a : $11^{3k+1} \equiv 4[7]$
$11^3 \equiv 1[7]$	- Pour $n = 3k+2$, on a : $11^{3k+2} \equiv 2[7]$

La division euclidienne de 1999 par 3 nous donne : $1999 = 3(666) + 1 = 3k + 1$ or $11^{3k+1} \equiv 4[7]$ alors le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7 est 4.

II/ <u>Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes</u> :

a) <u>Méthode par congruence</u> :

* $14x + 21y = 7$; $14 \wedge 21 = 7$; $7/7$ donc $2x + 3y = 1$

$2x = 1 - 3y \Leftrightarrow 2x \equiv 1[3] \Leftrightarrow 4x \equiv 2[3] \Rightarrow x = 3k + 2$. En remplaçant x par sa valeur dans l'équation $2x + 3y = 1$, on obtient $y = -2k - 1$.

$$\boxed{S = \{(3k+2\ ;\ -2k-1); k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $5p + 3q = 7$; $5 \wedge 3 = 1$; $7/1$ donc $5p + 3q = 7$

$5p = 7 - 3q \Leftrightarrow 5p \equiv 1[3] \Leftrightarrow 10p \equiv 2[3] \Rightarrow p = 3k + 2$. En remplaçant p par sa valeur dans l'équation $5p + 3q = 7$, on obtient $q = -5k - 1$.

$$\boxed{S = \{(3k+2\ ;\ -5k-1); k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $4u - 8v = 3$; $4 \wedge 8 = 4$; 4 ne divise pas 3 donc $\boxed{S = \emptyset}$

b) <u>Avec l'algorithme d'Euclide</u> :

* $11u - 7v = -4$; $11 \wedge 7 = 1$; $4/1$ donc $11u - 7v = -4$

Recherche de solution particulière

q	1	1	1	3
a	11	7	4	3
b	7	4	3	1
r	4	3	1	0

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$;

$1 = 4 - 3(1)$; $3 = 7 - 4(1)$; $4 = 11 - 7(1)$

On a : $1 = 4 - 3 = 4 - 7 + 4$

$$1 = 4(2) - 7 = 2(11 - 7) - 7$$
$$1 = 11(2) - 7(2) - 7 = 11(2) - 7(3)$$

$11(2) - 7(3) = 1$, en multipliant par (-4), on obtient : $11(-8) - 7(-12) = -4$; une solution particulière de l'équation $11u - 7v = -4$ est le couple $(u_0; v_0) = (-8; -12)$

$$-\begin{cases} 11u - 7v = -4 \\ 11u_0 - 7v_0 = -4 \end{cases}$$
$$\overline{11(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0}$$

$11(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow 11(u - u_0) = 7(v - v_0) \Rightarrow$

- $7/11(u + 8) \Rightarrow$d'après Gauss $7/(u + 8) \Rightarrow u + 8 = 7k \Leftrightarrow u = 7k - 8\,, k \in \mathbb{Z}$
- $11/7(v + 12) \Rightarrow$d'après Gauss $11/(v + 12) \Rightarrow v + 12 = 11k$
  $\Leftrightarrow v = 11k - 12\,, k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(7k - 8\,; 11k - 12); k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $7x - 21y = 4$; $7 \wedge 21 = 7$; 7ne divise pas 4 donc $\boxed{S = \emptyset}$

* $34p - 15q = 2$; $34 \wedge 15 = 1$; $2/1$ donc $34p - 15q = 2$

Recherche de solution particulière

q	2	3	1	3
a	34	15	4	3
b	15	4	3	1
r	4	3	1	0

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$;

$1 = 4 - 3(1)$; $3 = 15 - 4(3)$; $4 = 34 - 15(2)$

On a : $1 = 4 - 3 = 4 - 15 + 4(3)$

$$1 = 4(4) - 15 = 4[34 - 15(2)] - 15$$
$$1 = 34(4) - 15(8) - 15 = 34(4) - 15(9)$$

$34(4) - 15(9) = 1$, en multipliant par (2), on obtient : $34(8) - 15(18) = 2$; une solution particulière de l'équation $34p - 15q = 2$ est le couple $(p_0; q_0) = (8; 18)$

$$-\begin{cases} 34p - 15q = 2 \\ 34p_0 - 15q_0 = 2 \end{cases}$$
$$\overline{34(p - p_0) - 15(q - q_0) = 0}$$

$34(p - p_0) - 15(q - q_0) = 0 \Leftrightarrow 34(p - p_0) = 15(q - q_0) \Rightarrow$

- $15/34(p - 8) \Rightarrow$d'après Gauss $15/(p - 8) \Rightarrow p - 8 = 15k$
  $\Rightarrow p = 15k + 8\ \ , k \in \mathbb{Z}$
- $34/15(q - 18) \Rightarrow$d'après Gauss $34/(q - 18) \Rightarrow q - 18 = 34k$
  $\Rightarrow q = 34k + 18\ \ , k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(15k + 8\,; 34k + 18); k \in \mathbb{Z}\}}$$

III/1°) On désigne par a la longueur et b la largeur du rectangle, avec $(a > b)$.

On a : $\begin{cases} a = 72 \\ \text{PPCM}(a, b) = 216 \end{cases}$

Les valeurs possibles de b :

$\begin{cases} a = 72 \\ \text{PPCM}(72, b) = 216 \end{cases}$ Soit $a = a'd\,; b = b'd$ tel que : $a' \wedge b' = 1$

$m \times d = a'd \times b'd \Rightarrow 216d = a'b'd^2 \Rightarrow 216 = a'b'd$; or $\left(a' = \frac{a}{d}\right)$

alors $216 = ab' \Leftrightarrow 216 = 72b' \Rightarrow b' = 3$

$a'd = 72 \Leftrightarrow a' \in D_{72} \Leftrightarrow a' \in \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$

Or $a' \wedge b' = 1$ et $b' = 3$ alors $a' \in \{1; 2; 4; 8\}$

* Si $a' = 1 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{1} = 72$ et $b = b'd = 3(72) = 216$

$216 > 72$ donc $a' = 1$ ne convient pas.

* Si $a' = 2 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{2} = 36$ et $b = b'd = 3(36) = 108$

$108 > 72$ donc $a' = 2$ ne convient pas.

* Si $a' = 4 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{4} = 18$ et $b = b'd = 3(18) = 54$

$54 < 72$ donc $a' = 4$ convient.

* Si $a' = 8 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{8} = 9$ et $b = b'd = 3(9) = 27$

$27 < 72$ donc $a' = 8$ convient.

Donc les valeurs possibles de b sont : 27 et 54

2°) * Trouvons les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240 :

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$. Le nombre de diviseur de 240 est 20 dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{D_{240} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 16; 20; 24; 30; 40; 48; 60; 80; 120; 240\}}$$

* Calculons l'entier naturel n tel que : $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$n^2 - 240$ est un carré parfait si et seulement si $n^2 - 240 = p^2$.

$n^2 - 240 = p^2 \Leftrightarrow n^2 - p^2 = 240 \Leftrightarrow (n + p)(n - p) = 240$

$(n + p)$ et $(n - p)$ sont éléments des diviseurs de 240 ; et $(n + p) > (n - p)$.

- $240 = 1 \times 240 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 240 \\ n - p = 1 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{241}{2} \notin \mathbb{N}$
- $240 = 2 \times 120 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 120 \\ n - p = 2 \end{cases} \Rightarrow n = 61 \in \mathbb{N}$
- $240 = 3 \times 80 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 80 \\ n - p = 3 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{83}{2} \notin \mathbb{N}$
- $240 = 4 \times 60 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 60 \\ n - p = 4 \end{cases} \Rightarrow n = 32 \in \mathbb{N}$
- $240 = 5 \times 48 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 48 \\ n - p = 5 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{53}{2} \notin \mathbb{N}$

- $240 = 6 \times 40 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 40 \\ n - p = 6 \end{cases} \Rightarrow n = 23 \in \mathbb{N}$
- $240 = 8 \times 30 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 30 \\ n - p = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 19 \in \mathbb{N}$
- $240 = 10 \times 24 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 24 \\ n - p = 10 \end{cases} \Rightarrow n = 17 \in \mathbb{N}$
- $240 = 12 \times 20 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 20 \\ n - p = 12 \end{cases} \Rightarrow n = 16 \in \mathbb{N}$
- $240 = 15 \times 16 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 16 \\ n - p = 15 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{31}{2} \notin \mathbb{N}$

Pour que $n^2 - 240$ soit un carré parfait il faut que : $\boxed{n \in \{16; 17; 19; 23; 32; 61\}}$

Exercice 4 :

1) Soit l'entier naturel $\mathrm{N} = 1323$.

a) $\boxed{\mathrm{N} = 3^3 \times 7^2}$.

b) * Déterminons le nombre de diviseurs de N :

nombres de diviseurs est $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$, donc le nombre de diviseur de N est 12.

* Trouvons tous les diviseurs de N :

$\boxed{\mathcal{D}_{1323} = \{1; 3; 7; 9; 21; 27; 49; 63; 147; 189; 441; 1323\}}$

c) Écrivons N dans le système de numération de base 2 et 3 :

* N en base 2 : $\boxed{\mathrm{N} = 1323 = \overline{10100101011}^{2}}$

* N en base 3 : $\boxed{\mathrm{N} = 1323 = \overline{1211000}^{3}}$

2) Déterminons n entier naturel pour que :

$A_n = n^2 + n + 12$ soit divisible par $B_n = n + 1$.

$$\begin{array}{r|l} n^2 + n + 12 & n + 1 \\ \cline{2-2} -n^2 - n \quad\quad & n \\ \cline{1-1} / \quad\quad / \quad 12 & \end{array}$$

alors on a : $\frac{n^2+n+12}{n+1} = n + \frac{12}{n+1}$

Pour que A_n soit divisible par B_n, il faut que $(n + 1)$ soit élément des diviseurs de 12.

Donc $(n + 1) \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

- $n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$
- $n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$
- $n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$
- $n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$
- $n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$
- $n + 1 = 12 \Rightarrow n = 11$

A_n est divisible par B_n si $\boxed{n \in \{0; 1; 2; 3; 5; 11\}}$

Exercice 5 :

I-Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations et systèmes suivants :

- $5x \equiv 1[6] \Rightarrow 25x \equiv 5[6] \Rightarrow x \equiv 5[6]$ alors $x = 6k + 5$

$$\boxed{S = \{6k + 5; k \in \mathbb{Z}\}}$$

- $15x \equiv 25[35] \Leftrightarrow 3x \equiv 5[7] \Leftrightarrow 15x \equiv 25[7] \Leftrightarrow x \equiv 4[7] \Rightarrow x = 7k + 4$

$$\boxed{S = \{7k + 4; k \in \mathbb{Z}\}}$$

- $424 + 161x \equiv 0[16] \Leftrightarrow 8 + x \equiv 0[16] \Leftrightarrow x \equiv 8[16] \Rightarrow x = 16k + 8$

$$\boxed{S = \{16k + 8; k \in \mathbb{Z}\}}$$

- $x^2 + 2x \equiv 6[9]$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 + 2x$	0	3	8	6	6	8	3	0	8

$$\boxed{S = \{9k + 3; 9k + 4\} \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$$

- $x \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$: $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$

1ère méthode : $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0} \Rightarrow \dot{2}x = -\dot{1} \Rightarrow \dot{2}x = \dot{4} \Rightarrow x = \dot{2}$

$$\boxed{S = \{\dot{2}\}}$$

2ème méthode :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}x + \dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$

$$\boxed{S = \{\dot{2}\}}$$

- $x \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$: $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$

$$\Delta = (\dot{2})^2 - \dot{4}(\dot{1})(\dot{6}) = -\dot{20} = -\dot{6} = \dot{1}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\dot{2}-\dot{1}}{\dot{2}} = \frac{-\dot{3}}{\dot{2}} = \frac{\dot{4}}{\dot{2}} = \dot{2} \\ x_2 = \frac{-\dot{2}+\dot{1}}{\dot{2}} = \frac{-\dot{1}}{\dot{2}} = \frac{\dot{6}}{\dot{2}} = \dot{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{\dot{2}\,;\dot{3}\}}$$

d) $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$; Soit le couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} x = 3u + 2 \\ x = 4v + 1 \end{cases}$ en posant $x = x$, on aura : $3u - 4v = -1$

$3u \equiv 3[4] \Leftrightarrow u \equiv 1[4] \Rightarrow u = 4k + 1$, en remplaçant u par sa valeur dans x on a :
$x = 3(4k + 1) + 2 \Rightarrow x = 12k + 5$.

$$\boxed{S = \{12k + 5; k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \equiv 12[7] \\ 45x \equiv 20[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 9[11] \end{cases}$;

Soit le couple $(p; q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} x = 7p + 5 \\ x = 11q + 9 \end{cases}$ en posant $x = x$

on aura : $7p - 11q = 4$

$7p = 4 + 11q \Leftrightarrow 7p \equiv 4[11] \Rightarrow 56p \equiv 32[11]$

$p \equiv 10[11] \Rightarrow p = 11k + 10$, en remplaçant p par sa valeur dans x on a :

$x = 7(11k + 10) + 5 \Rightarrow x = 77k + 75$

$$\boxed{S = \{77k + 75; k \in \mathbb{Z}\}}$$

$$* \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x \cdot y} = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 & \mathbf{(1)} \\ x \cdot y = -1 & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

$x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - x \cdot y + y^2) = 0$

Dans $\mathbb{Z}^2$: $x + y = 0$ et $x^2 + y^2 = -1$ impossible,

Donc on a : $\begin{cases} x + y = 0 & (S) \\ x \cdot y = -1 & (P) \end{cases} \Rightarrow X^2 - 1 = 0 \Rightarrow X = \pm 1$

Alors si $y = 1; x = -1$ et si $y = -1; x = 1$

$$\boxed{S = \{(1; -1); (-1; 1)\}}$$

II/1°) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans la base dix.

<u>Déterminons x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9</u> :

Posons $N = \overline{x43y}$; $0 < x \leq 9$; $0 \leq y \leq 9$

- N est divisible par 2, si $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$
- N est divisible par 9, si $x + 4 + 3 + y \equiv 0[9] \Rightarrow x + y \equiv 2[9]$

* Si $y = 0$ alors $x \equiv 2[9] \Rightarrow x = 9k + 2$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$0 < 9k + 2 \leq 9$

$-0{,}22 < k \leq 0{,}77$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 2 = 2$ d'où $\boxed{(2; 0) = \overline{\mathbf{2430}}}$

* Si $y = 2$ alors $x \equiv 0[9] \Rightarrow x = 9k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$0 < 9k \leq 9$

$0 < k \leq 1$

alors $k = 1 \Rightarrow x = 9(1) = 9$ d'où $\boxed{(9; 2) = \overline{\mathbf{9432}}}$

* Si $y = 4$ alors $x \equiv 7[9] \Rightarrow x = 9k + 7$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$0 < 9k + 7 \leq 9$

$-0{,}77 < k \leq 0{,}22$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 7 = 7$ d'où $\boxed{(7; 4) = \overline{\mathbf{7434}}}$

* Si $y = 6$ alors $x \equiv 5[9] \Rightarrow x = 9k + 5$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$0 < 9k + 5 \leq 9$

$-0{,}55 < k \leq 0{,}44$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 5 = 5$ d'où $\boxed{(5; 6) = \overline{\mathbf{5436}}}$

* Si $y = 8$ alors $x \equiv 3[9] \Rightarrow x = 9k + 3$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$0 < 9k + 3 \leq 9$

$-0{,}33 < k \leq 0{,}66$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 3 = 3$ d'où $\boxed{(3; 8) = \overline{\mathbf{3438}}}$

$$\boxed{S = \{\mathbf{2430}; \mathbf{9432}; \mathbf{7434}; \mathbf{5436}; \mathbf{3438}\}}$$

2°) Un nombre s'écrit $\overline{724x5}$ dans le système décimal.

<u>Déterminons x pour qu'il soit divisible par 9</u> :

Le nombre $\overline{724x5}$ est divisible par 9 si $7+2+4+x+5 \equiv 0[9]$
Alors $x+18 \equiv 0[9] \Rightarrow x = 9k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq x \leq 9$.

$$0 \leq 9k \leq 9$$
$$0 \leq k \leq 1$$

Alors $k \in \{0;1\}$; $\begin{cases} \text{Si } k=0; x = 9(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Si } k=1; x = 9(1) = 9 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{72405; 72495\}}$$

4°) Déterminons les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 28$

$n^2 - p^2 = 28 \Leftrightarrow (n-p)(n+p) = 28$
$(n+p)$ et $(n-p)$ sont éléments des diviseurs de 28;
Donc $(n+p)$ et $(n-p) \in D_{28} = \{1;2;4;7;14;28\}$ et $(n+p) > (n-p)$.

- $28 = 1 \times 28 \Leftrightarrow \begin{cases} n+p = 28 \\ n-p = 1 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{29}{2} \notin \mathbb{N}$
- $28 = 2 \times 14 \Leftrightarrow \begin{cases} n+p = 14 \\ n-p = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} n=8 \in \mathbb{N} \\ p=6 \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$
- $28 = 4 \times 7 \Leftrightarrow \begin{cases} n+p = 7 \\ n-p = 4 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$

$$\boxed{S = \{(8;6)\}}$$

Exercice 6 :

1°) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$les systèmes suivants : Soit : $\begin{cases} PGCD(x,y) = x \wedge y = d \\ PPCM(x,y) = x \vee y = m \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y = 60 \\ PGCD(x,y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 60 \\ d = 12 \end{cases}$;

Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = 12x'; y = 12y'$

$\begin{cases} 12x' + 12y' = 60 \\ d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = 60/12 \\ d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = 5 \\ d = 12 \end{cases}$

x'	1	2
y'	4	3

Or $x' \wedge y' = 1$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(1) = 12 \\ y = 12y' = 12(4) = 48 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(2) = 24 \\ y = 12y' = 12(3) = 36 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(12;48);(48;12);(24;36);(36;24)\}}$$

b) $\begin{cases} PGCD(x,y) = 27 \\ PPCM(x,y) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 27 \\ m = 108 \end{cases}$;

Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = 27x'; y = 27y'$
$m \cdot d = x \cdot y \Leftrightarrow 108 \times 27 = 27^2 x' \cdot y' \Leftrightarrow x' \cdot y' = 4$

x'	1	$\cancel{2}$
y'	4	$\cancel{2}$

Or $x' \wedge y' = 1$

Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 27x' = 27(1) = 27 \\ y = 27y' = 27(4) = 108 \end{cases}$

$\boxed{S = \{(27; 108); (108; 27)\}}$

c) $\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 13 \\ x \cdot y = 14196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 13 \\ x \cdot y = 14196 \end{cases}$;

Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = 13x'; y = 13y'$

$\begin{cases} d = 13 \\ 13x' \cdot 13y' = 14196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 13 \\ x' \cdot y' = \frac{14196}{169} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 13 \\ x' \cdot y' = 84 \end{cases}$

x'	1	~~2~~	3	4	~~6~~	7
y'	84	~~42~~	28	21	~~14~~	12

Or $x' \wedge y' = 1$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(1) = 13 \\ y = 13y' = 13(84) = 1092 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(3) = 39 \\ y = 13y' = 13(28) = 364 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 4 \\ y' = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(4) = 52 \\ y = 13y' = 13(21) = 273 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 7 \\ y' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(7) = 91 \\ y = 13y' = 13(12) = 156 \end{cases}$

$\boxed{S = \{(13; 1092); (1092; 13); (39; 364); (364; 39); (52; 273); (273; 52); (91; 156); (156; 91)\}}$

d) $\begin{cases} \text{PPCM}(x, y) = 168 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 168 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases}$;

Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m \cdot d = x \cdot y \Leftrightarrow d = \frac{x \cdot y}{m} = \frac{1008}{168} \Rightarrow d = 6$

$\begin{cases} d = 6 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ 6x' \cdot 6y' = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ x' \cdot y' = 28 \end{cases}$

x'	1	~~2~~	4
y'	28	~~14~~	7

Or $x' \wedge y' = 1$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6x' = 6(1) = 6 \\ y = 6y' = 6(28) = 168 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 4 \\ y' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6x' = 6(4) = 24 \\ y = 6y' = 6(7) = 42 \end{cases}$

$\boxed{S = \{(6; 168); (168; 6); (24; 42); (42; 24)\}}$

e) $\begin{cases} x + y = 56 \\ \text{PPCM}(x, y) = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 56 \\ m = 105 \end{cases}$;

Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$
$m \cdot d = x \cdot y \Rightarrow m = x'y'd$
$\begin{cases} d(x'+y') = 56 \\ x'y'd = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x'+y') = 56/d \\ x' \cdot y' = 105/d \end{cases} \Leftrightarrow d \in D_{56} \cap D_{105}$
Or $D_{56} = \{1;2;4;7;8;14;28;56\}$ et $D_{105} = \{1;3;5;7;15;21;35;105\}$
Alors $d \in \{1;7\}$

- Pour $d = 1$, on a : $\begin{cases} x' + y' = 56 & (S) \\ x' \cdot y' = 105 & (P) \end{cases}$

L'équation $X^2 - 56X + 105 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$

- Pour $d = 7$, on a : $\begin{cases} x' + y' = 8 & (S) \\ x' \cdot y' = 15 & (P) \end{cases}$

L'équation $X^2 - 8X + 15 = 0$ admet comme solution dans $\mathbb{N}$, $X_1 = 3$; $X_2 = 5$
Alors $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7x' = 7(3) = 21 \\ y = 7y' = 7(5) = 35 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(21;35);(35;21)\}}$$

f) $\text{PPCM}(x;y) + \text{PGCD}(x;y) = y + 9$
Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$
$m + d = y + 9$; or $m = x'y'd$
$x'y'd + d = y' \cdot d + 9 \Leftrightarrow d(x' \cdot y' + 1) = y' \cdot d + 9$
$x' \cdot y' + 1 = y' + \frac{9}{d}$; alors $d \in \{1;3;9\}$

- Pour $d = 1$, on a : $x' \cdot y' + 1 = y' + 9 \Rightarrow y'(x' - 1) = 8$
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 8 \\ y' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 9 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' = 9 \\ y = y' = 1 \end{cases}$
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 8 \end{cases}$; $2 \wedge 8 = 2$ ne convient pas.
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 4 \\ y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' = 5 \\ y = y' = 2 \end{cases}$
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 2 \\ y' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' = 3 \\ y = y' = 4 \end{cases}$
- Pour $d = 3$, on a : $x' \cdot y' + 1 = y' + 3 \Rightarrow y'(x' - 1) = 2$
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 2 \\ y' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(3) = 9 \\ y = 3y' = 3(1) = 3 \end{cases}$
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 2 \end{cases}$; $2 \wedge 2 = 2$ ne convient pas
- Pour $d = 9$, on a : $x' \cdot y' + 1 = y' + 1 \Rightarrow y'(x' - 1) = 0$
  ne convient pas car $x' \wedge y' \neq 1$

$$\boxed{S = \{(9;1);(5;2);(3;4);(9;3)\}}$$

h) $2(x \vee y) + 3(x \wedge y) = 78$
Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$
$2m + 3d = 78 \Leftrightarrow 2x'y'd + 3d = 78 \Leftrightarrow 2x'y' + 3 = \frac{78}{d}$

alors $d \in D_{78} \Leftrightarrow d \in \{1; 2; 3; 6; 13; 26; 39; 78\}$

- Pour $d = 1$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{1} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{75}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 2$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{2} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 18$

x'	1	2	$\cancel{3}$
y'	18	9	$\cancel{6}$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x' = 2(1) = 2 \\ y = 2y' = 2(18) = 36 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x' = 2(2) = 4 \\ y = 2y' = 2(9) = 18 \end{cases}$

- Pour $d = 3$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{3} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{23}{2} \notin \mathbb{N}$.
- Pour $d = 6$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{6} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 5$

x'	1
y'	5

Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6x' = 6(1) = 6 \\ y = 6y' = 6(5) = 30 \end{cases}$

- Pour $d = 13$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{13} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 26$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{26} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 0$,

  ne convient pas car ici $x' \wedge y' \neq 1$
- Pour $d = 39$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{39} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 78$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{78} \Leftrightarrow x' \cdot y' = -1 \notin \mathbb{N}$.

$$\boxed{S = \{(2; 36); (36; 2); (4; 18); (18; 4); (6; 30); (30; 6)\}}$$

2°) Déterminons l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $PPCM(a, b) = m$; $PGCD(a, b) = d$ vérifiant les relations suivantes

a) $\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 < d < 15 \end{cases}$; Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m - 3d = 108 \Leftrightarrow x'y'd - 3d = 108 \Rightarrow x'y' - 3 = \frac{108}{d}$

alors $d \in D_{108} \Leftrightarrow d \in \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108\}$

Or $10 < d < 15 \Rightarrow d = 12$

On a : $x'y' - 3 = \frac{108}{12} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 12$

x'	1	$\cancel{2}$	3
y'	12	$\cancel{6}$	4

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(1) = 12 \\ y = 12y' = 12(12) = 144 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(3) = 36 \\ y = 12y' = 12(4) = 48 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(12; 144); (144; 12); (36; 48); (48; 36)\}}$$

d) $m^2 - 3d^2 = 1998$

Soit x' et y' tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m^2 - 3d^2 = 1998 \Leftrightarrow (x'y'd)^2 - 3d^2 = 1998 \Rightarrow (x'y')^2 - 3 = \frac{1998}{d^2}$

Or $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$, alors l'entier dont le carré est un diviseur de 1998 est 3, donc $d = 3$.

$(x'y')^2 - 3 = \frac{1998}{3^2} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 15$

x'	1	3
y'	15	5

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(1) = 3 \\ y = 3y' = 3(15) = 45 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(3) = 9 \\ y = 3y' = 3(5) = 15 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(3; 45); (45; 3); (9; 15); (15; 9)\}}$$

Exercice 7 :

I- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1°) Montrons que a et b sont divisibles par $n - 4$:

- La division euclidienne de a par $(n - 4)$ nous donne :

$\boxed{a = (n - 4)(n^2 + 3n) = n(n - 4)(n + 3)}$

- La division euclidienne de b par $(n - 4)$ nous donne :

$\boxed{b = (n - 4)(2n + 1)}$

Conclusion : a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2°) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$ On note d le PGCD de α et β.

a) Établissons une relation entre α et β indépendante de n :

On a : $\beta = n + 3 \Rightarrow n = \beta - 3$; or $\alpha = 2n + 1 = 2(\beta - 3) + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\beta - 5}$

b) Démontrons que d est un diviseur de 5 :

$\mathrm{PGCD}(2n + 1 ; n + 3) = 2n + 1 - n - 3 = n - 2$

$\mathrm{PGCD}(n + 3; n - 2) = n + 3 - n + 2 = 5$

$d = 5$ alors d est un diviseur de 5.

c) Démontrons que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5 :

$n - 2$ est un multiple de 5 si et seulement si : $n - 2 = 5k$

α et β sont multiples de 5 si et seulement si : $\alpha = 5k'$ et $\beta = 5k''$

$n - 2 = 5k \Rightarrow n = 5k + 2$,

En remplaçant n dans α, on aura : $\alpha = 2n + 1 = 2(5k + 2) + 1$

$\Rightarrow \alpha = 10k + 5 = 5(2k + 1) \Rightarrow \alpha = 5k'$, alors α est un multiple de 5

En remplaçant n dans β, on aura : $\beta = n + 3 = 5k + 2 + 3$

$\Rightarrow \beta = 5k + 5 = 5(k+1) \Rightarrow \beta = 5k''$, alors β est un multiple de 5

3°) Montrons que $2n+1$ et n sont premiers entre eux :

Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

$\text{PGCD}(2n+1\,;n) = 2n+1-n = n+1$

$\text{PGCD}(n+1;n) = n+1-n = 1.$

Le $\text{PGCD}(2n+1\,;n) = 1$ alors $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

4°) a) Déterminons suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b :

$a = n(n-4)(n+3) = n(n-4) \times 5(k+1)$

$b = (n-4)(2n+1) = (n-4) \times 5(2k+1)$

1er Cas : Si $(n-2)$ n'est pas un multiple de 5, alors $\boxed{\text{PGCD}(a;b) = n-4}$

2er Cas : Si $(n-2)$ est un multiple de 5, alors $\boxed{\text{PGCD}(a;b) = 5(n-4)}$

b) Vérifions les résultats obtenus dans les cas particuliers :

- Si $n = 11\,; 11-2 = 9 \Rightarrow \text{PGCD}(a;b) = 11-4 = 7$
- Si $n = 12\,; 12-2 = 10 \Rightarrow \text{PGCD}(a;b) = 5(12-4) = 40$

Exercice 8 :

Soit n le nombre de soldats et $0 < n < 400$

On a : $\begin{cases} n \equiv 3[16] \\ n \equiv 5[25] \end{cases}$; Soit le couple $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} n = 16x+3 \\ n = 25y+5 \end{cases}$ en posant $n = n$

on a : $16x - 25y = 2$.

Utilisons l'Algorithme d'Euclide :

q	1	1	1	3	2
a	25	16	9	7	2
b	16	9	7	2	1
r	9	7	2	1	0

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$

On a : $1 = 7 - 2(3)$

$2 = 9 - 7$

$7 = 16 - 9$

$9 = 25 - 16$

$1 = 7 - 2(3) = 7 - 3(9-7) = 7(4) - 9(3)$

$1 = 4(16-9) - 9(3) = 16(4) - 9(7)$

$1 = 16(4) - 7(25-16) = 16(4+7) - 25(7)$

$1 = 16(11) - 25(7)$, en multipliant le tout par 2 on obtient : $16(22) - 25(14) = 2$

une solution particulière de l'équation $16x - 25y = 2$ est le couple $(x_0; y_0) = (22; 14)$

$$-\begin{cases} 16x - 25y = 2 \\ 16x_0 - 25y_0 = 2 \end{cases}$$

$$16(x - x_0) - 25(y - y_0) = 0$$

$16(x-x_0) - 25(y-y_0) = 0 \Leftrightarrow 16(x-x_0) = 25(y-y_0) \Rightarrow$

- $25/16(x-22) \Rightarrow$d'après Gauss $25/(x-22) \Rightarrow x - 22 = 25k$

$\Rightarrow x = 25k + 22 \;\; , k \in \mathbb{Z}$

- $16/25(y-14) \Rightarrow$d'après Gauss $16/(y-14) \Rightarrow y-14=16k$
  $\Rightarrow y=16k+14 \ , k \in \mathbb{Z}$

Remplaçons x dans n : $n=16x+3=16(25k+22)+3$ on obtient

$n=400k+355$

$0<n<400$

$0<400k+355<400$

$-355<400k<45$

$-0{,}88<k<0{,}11$

On a $k=0 \Rightarrow n=400(0)+355=355$ alors il y'a 355 soldats.

II/-1) <u>Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$</u> : $11p-7q=1$.

$11p=1+7q \Leftrightarrow 4p\equiv 1[7] \Leftrightarrow 8p\equiv 2[7] \Rightarrow p=7k+2$, en remplaçant p par sa valeur dans $11p-7q=1$, on a : $11(7k+2)-7q=1 \Rightarrow q=11k+3$.

$$\boxed{S=\{(7k+2;11k+3);k\in\mathbb{Z}\}}$$

2) a) <u>Son reste dans la division par 77</u> :

$\begin{cases} n\equiv 4[7] \\ n\equiv 3[11]\end{cases}$; Soit le couple $(p;q)\in\mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} n=7q+4 \\ n=11p+3\end{cases}$; en posant $n=n$, on a : $11p-7q=1$, cette équation a pour solution : $\begin{cases} p=7k+2 \ , k\in\mathbb{Z} \\ q=11k+3 \ , k\in\mathbb{Z}\end{cases}$; en remplaçant p dans n, on a : $n=11p+3=11(7k+2)+3$

$\Rightarrow n=77k+25 \Leftrightarrow n\equiv 25[77]$, alors le reste de la division de n par 77 est 25.

b) <u>Déterminons les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200</u> :

On a : $0<n<200$

$0<77k+25<200$

$-0{,}32<k<2{,}27$; alors $k\in\{0;1;2\}$

- Si $k=0$, on a : $n=77k+25=77(0)+25 \Rightarrow \boxed{n=25}$
- Si $k=1$, on a : $n=77k+25=77(1)+25 \Rightarrow \boxed{n=102}$
- Si $k=2$, on a : $n=77k+25=77(2)+25 \Rightarrow \boxed{n=179}$

<u>Exercice 9</u> :

I-) N et M sont deux nombres tels que : N s'écrit $\overline{1a3a}^4$ et M s'écrit $\overline{bca35}^7$.

1°) <u>Déterminons suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 6^n par 11</u> :

$6^0\equiv 1[11]$	$6^4\equiv 9[11]$	$6^8\equiv 4[11]$
$6^1\equiv 6[11]$	$6^5\equiv 10[11]$	$6^9\equiv 2[11]$
$6^2\equiv 3[11]$	$6^6\equiv 5[11]$	$6^{10}\equiv 1[11]$
$6^3\equiv 7[11]$	$6^7\equiv 8[11]$	

La période est 10 donc :

- Pour $n=10k$, on a : $6^{10k}\equiv 1[11]$

- Pour $n = 10k + 1$, on a : $6^{10k+1} \equiv 6[11]$
- Pour $n = 10k + 2$, on a : $6^{10k+2} \equiv 3[11]$
- Pour $n = 10k + 3$, on a : $6^{10k+3} \equiv 7[11]$
- Pour $n = 10k + 4$, on a : $6^{10k+4} \equiv 9[11]$
- Pour $n = 10k + 5$, on a : $6^{10k+5} \equiv 10[11]$
- Pour $n = 10k + 6$, on a : $6^{10k+6} \equiv 5[11]$
- Pour $n = 10k + 7$, on a : $6^{10k+7} \equiv 8[11]$
- Pour $n = 10k + 8$, on a : $6^{10k+8} \equiv 4[11]$
- Pour $n = 10k + 9$, on a : $6^{10k+9} \equiv 2[11]$

Les restes de la division euclidienne de 6^n par 11 sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$.

2°) <u>Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation</u> : $7x + y = 46$

$7x + y = 46 \Leftrightarrow y = 46 - 7x \Rightarrow y \equiv 4[7]$

$y = 7k + 4$, en remplaçant y dans l'équation $7x + y = 46$

on a : $7x + 7k + 4 = 46 \Rightarrow x = -k + 6$.

$$\boxed{S = \{(-k + 6; 7k + 4); k \in \mathbb{Z}\}}$$

3°) <u>Donnons les écritures en base 4 de N et en base 7 de M</u> :

Sachant que : $N \equiv 0[11]$ et $7b + c = 46$

$N \equiv 0[11] \Leftrightarrow \overline{1a3a}^4 \equiv 0[11] \Rightarrow 6a \equiv 1[11]$ en multipliant par 2

on a : $12a \equiv 2[11] \Rightarrow a \equiv 2[11] \Rightarrow a = 11k + 2$

$$0 < a < 4$$
$$0 < 11k + 2 < 4$$
$$-0{,}18 < k < 0{,}18 \ \Rightarrow k = 0$$

alors $a = 2$

$7b + c = 46$ alors $b = 6$ et $c = 4$.

On a : $\boxed{N = \overline{1232}^4}$ et $\boxed{M = \overline{64235}^7}$

4°) <u>Déterminons l'entier naturel n tel que $M^n \equiv 3[5]$</u> :

$M^n \equiv 3[5] \Leftrightarrow \left(\overline{64235}^7\right)^n \equiv 3[5]$

$(15902)^n \equiv 3[5] \Leftrightarrow 2^n \equiv 3[5]$

$2^0 \equiv 1[5]$; $2^1 \equiv 2[5]$; $2^2 \equiv 4[5]$; $2^3 \equiv 3[5]$

alors $n = 3$.

5°) a) <u>Écrivons dans le système décimal M et N</u> :

$\boxed{M = 15902 ; N = 110}$

b) <u>Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues a et b</u> :

$$\begin{cases} \text{PPCM}(a,b) = M - N \\ \text{PGCD}(a,b) = 5N + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{PPCM}(a,b) = 15792 \\ \text{PGCD}(a,b) = 564 \end{cases}$$

Soit a' et b' tel que : $a' \wedge b' = 1$ et $a = 564a'; b = 564b'$.

$\text{PPCM}(a,b) \times \text{PGCD}(a,b) = a \times b$

$15792 \times 564 = 564a' \times 564b' \Leftrightarrow a' \times b' = 28$

a'	1	$\cancel{2}$	4
b'	28	$\cancel{14}$	7

- Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 564a' = 564(1) = 564 \\ b = 564b' = 564(28) = 15792 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 564a' = 564(4) = 2256 \\ b = 564b' = 564(7) = 3948 \end{cases}$

$\boxed{S = \{(564; 15792); (15792; 564); (2256; 3948); (3948; 2256)\}}$

Exercice 10 :

On note n un entier non nul, p l'entier naturel $3n + 1$ et q l'entier naturel $5n - 1$.

On a : $p = 3n + 1$ et $q = 5n - 1$

1°) Démontrons que le PGCD de p et q est diviseur de 8 :

$\text{PGCD}(5n - 1\,; 3n + 1) = 5n - 1 - 3n - 1 = 2n - 2$

$\text{PGCD}(3n + 1; 2n - 2) = 3n + 1 - 2n + 2 = n + 3$

$\text{PGCD}(2n - 2; n + 3) = 2n - 2 - n - 3 = n - 5$

$\text{PGCD}(n + 3; n - 5) = n + 3 - n + 5 = 8$

$\text{PGCD}(5n - 1\,; 3n + 1) = 8$ alors le PGCD de p et q est un diviseur de 8.

2°)* Les valeurs de n :

Le PGCD est égal à 8 si et seulement si : $n - 5 = 8k$

Alors le PGCD est égal à 8 si : $\boxed{n = 8k + 5}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

* Calculons le PPCM de p et q :

$\text{PPCM}(p\,; q) \times \text{PGCD}(p\,; q) = p \times q$

Or $\begin{cases} \text{PGCD}(p\,; q) = 8 \\ p = 3n + 1 = 3(8k + 5) + 1 = 24k + 16 \\ q = 5n - 1 = 5(8k + 5) - 1 = 40k + 24 \end{cases}$

$\text{PPCM}(p\,; q) \times 8 = (24k + 16) \times (40k + 24)$

alors $\boxed{\text{PPCM}(p\,; q) = 120k^2 + 152k + 48}$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 11 :

1°) Trouvons les trois entiers naturels a, b, c :

Après décomposition en produit de facteur premier on a : $495 = 3^2 \times 5 \times 11$, alors

$\boxed{a = 9; b = 5; c = 11}$

2°) x, y, z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix.

Déterminons tous les triplets (x, y, z) pour lesquelles A est divisible par 495 :

A est divisible par 495 si A est à la fois divisible par 9; 5 et 11.

* $A = x13y8z$ est divisible par 5 si $z \in \{0; 5\}$;

- Pour $z = 0$:

* $A = x13y80$ est divisible par 9 si : $x + 1 + 3 + y + 8 + 0 \equiv 0[9]$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $x + y = 9k + 6$ (1)

* $A = x13y80$ est divisible par 11 si : $0 - 8 + y - 3 + 1 - x \equiv 0[11]$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, tel que : $y - x = 11k' + 10$ (2)

On a : $x + y = 9k + 6$

$$\begin{array}{r} 0 < x \leq 9 \\ +\ 0 < y \leq 9 \\ \hline 0 < x + y \leq 18 \end{array}$$

$0 < 9k + 6 \leq 18$

$-0,66 < k \leq 1,33$

Alors $k \in \{0; 1\}$

On a : $y - x = 11k' + 10$

$$\begin{array}{r} 0 < y \leq 9 \\ -9 < -x \leq 0 \\ \hline -9 < y - x \leq 9 \end{array}$$

$-9 < 11k' + 10 \leq 9$

$-1,72 < k' \leq -0,09$

Alors $k' = -1$

Formons un système avec l'équation (1) et (2) :

* Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 6 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

* Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 15 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$

Avec le triplet $(8; 7; 0)$, on a : $\boxed{A = \mathbf{813780}}$

- Pour $z = 5$:

* $A = x13y85$ est divisible par 9 si : $x + 1 + 3 + y + 8 + 5 \equiv 0[9]$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $x + y = 9k + 1$ (3)

* $A = x13y85$ est divisible par 11 si : $5 - 8 + y - 3 + 1 - x \equiv 0[11]$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, tel que : $y - x = 11k' + 5$ (4)

On a : $x + y = 9k + 1$

$$\begin{array}{r} 0 < x \leq 9 \\ +\ 0 < y \leq 9 \\ \hline 0 < x + y \leq 18 \end{array}$$

$0 < 9k + 1 \leq 18$

$-0,11 < k \leq 1,88$

Alors $k \in \{0; 1\}$

On a : $y - x = 11k' + 5$

$$\begin{array}{r} 0 < y \leq 9 \\ -9 < -x \leq 0 \\ \hline -9 < y - x \leq 9 \end{array}$$

$-9 < 11k' + 5 \leq 9$

$-1,27 < k' \leq 0,36$

Alors $k' \in \{-1; 0\}$

Formons un système avec l'équation (3) et (4) :

- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-5}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Avec le triplet $(8; 2; 5)$, on a : $\boxed{A = \mathbf{813285}}$

$$\boxed{S = \{(\mathbf{8}; \mathbf{7}; \mathbf{0}); (\mathbf{8}; \mathbf{2}; \mathbf{5})\}}$$

Exercice 12 :

Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°) Déterminons un couple d'entier $(\alpha; \beta)$:

$23\alpha + 7\beta = 1$

Utilisons l'Algorithme d'Euclide :

q	3	3	2
a	23	7	2
b	7	2	1
r	2	1	0

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$

On a : $1 = 7 - 2(3)$

$2 = 23 - 7(3)$

$1 = 7 - 2(3) = 7 - 3(23 - 7(3)) = 23(-3) + 7(10)$

$1 = 23(-3) + 7(10)$, alors $\boxed{(\alpha;\beta) = (-3;10)}$

2°)* Déduisons un couple $(u_0;v_0)$: $23u - 7v = -6$

On a : $23(-3) + 7(10) = 1$, en multipliant par -6 on obtient

$23(18) - 7(60) = -6$, alors $\boxed{(u_0;v_0) = (18;60)}$

* Résolvons complètement l'équation : $23u - 7v = -6$

$$-\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ 23u_0 - 7v_0 = -6 \end{cases}$$

$$23(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0$$

$23(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow 23(u - u_0) = 7(v - v_0) \Rightarrow$

- $7/23(u - 18)$ ⇒d'après Gauss $7/(u - 18) \Rightarrow u - 18 = 7k$
  $\Rightarrow u = 7k + 18\ ,k \in \mathbb{Z}$
- $23/7(v - 60)$ ⇒d'après Gauss $23/(v - 60) \Rightarrow v - 60 = 23k$
  $\Rightarrow v = 23k + 60\ ,k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(7k + 18; 23k + 60); k \in \mathbb{Z}\}}$$

3°) * Démontrons que x est solution de (S) si et seulement si il existe $(u;v)$ couple d'entier vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

x est solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u\ ,(u \in \mathbb{Z}) \\ 10 + 23u \equiv 4[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u\ ,(u \in \mathbb{Z}) \\ 23u \equiv -6[7] \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10 + 23u\ ,(u \in \mathbb{Z}) \\ 23u = -6 + 7v\ ,(v \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ C.Q.F.D

* Déduisons l'ensemble des solutions de (S) :

L'équation $23u - 7v = -6$ admet comme solution : $\begin{cases} u = 7k + 18 \\ v = 23k + 60 \end{cases}$; en remplaçant u dans x, on a : $x = 10 + 23u = 10 + 23(7k + 18) \Rightarrow x = 161k + 424$

$$\boxed{S = \{161k + 424; k \in \mathbb{Z}\}}$$

4°) Déterminons la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 16 :

On a : $x \equiv 0[16] \Leftrightarrow 161k + 424 \equiv 0[16] \Rightarrow k \equiv 8[16] \Rightarrow k = 16k' + 8$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

$$0 < k < 16$$
$$0 < 16k' + 8 < 16$$
$$-0{,}5 < k' < 0{,}5$$

alors $k' = 0 \Rightarrow k = 8$, donc $\boxed{x_0 = 1712}$

Exercice 13 :

1°) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_1) : $11x + 8y = 79$

a) Montrons que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3[11]$:

$11x + 8y = 79 \Rightarrow 8y \equiv 79[11] \Leftrightarrow 56y \equiv 14[11]$, alors $y \equiv 3[11]$ C.Q.F.D

b) Résolvons l'équation (E_1) :

On a : $11x + 8y = 79 \Rightarrow y \equiv 3[11] \Rightarrow y = 11k + 3$ en remplaçant y dans l'équation $11x + 8y = 79$ on a : $x = -8k + 5$.

$$\boxed{\mathrm{S} = \{(-8k + 5; 11k + 3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$

2°) Déterminons le nombre de pièces de chaque lot :

Soit $\begin{cases} x \text{ le nombre de pièces du } 1^{\text{er}} \text{ lot} \\ y \text{ le nombre de pièces du } 2^{\text{ème}} \text{ lot} \\ z \text{ le nombre de pièces du } 3^{\text{ème}} \text{ lot} \end{cases}$

tel que : $\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 & \mathbf{(1)} \\ 12x + 9y + z = 120 & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Dans $\mathbf{(1)}$; $z = 41 - x - y$ en remplaçant z dans $\mathbf{(2)}$, on a : $11x + 8y = 79$, or cette équation admet comme solution : $\begin{cases} x = -8k + 5 \\ y = 11k + 3 \end{cases}$; et le nombre de pièces ne dépasse pas 41, donc on a :

$1 \leq x < 41$	$1 \leq y < 41$
$1 \leq -8k + 5 < 41$	$1 \leq 11k + 3 < 41$
$-4{,}5 \leq k < 0{,}5$	$-0{,}18 \leq k < 3{,}45$
$k \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$	$k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$k \cap k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 41 - 5 - 3 = 33$

alors $\boxed{\begin{cases} \text{le nombre de pièces du } 1^{\text{er}} \text{ lot est } 5 \\ \text{le nombre de pièces du } 2^{\text{ème}} \text{ lot est } 3 \\ \text{le nombre de pièces du } 3^{\text{ème}} \text{ lot est } 33 \end{cases}}$

Exercice 14 :

1°) a) Montrons en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $324u + 245v = 1$

q	1	3	9	1	7
a	324	245	79	8	7
b	245	79	8	7	1
r	79	8	7	1	0

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$

$1 = 8 - 7$; $7 = 79 - 9(8)$; $8 = 245 - 79(3)$; $79 = 324 - 245$

On a : $1 = 8 - 7 = 8 - 79 + 8(9) = 8(10) - 79$

$1 = 10[245 - 79(3)] - 79 = 245(10) - 79(31)$

$1 = 245(10) - 31(324 - 245) = 324(-31) + 245(41)$

$324(-31) + 245(41) = 1$; alors $\boxed{(u; v) = (-31; 41)}$

b) Déduisons une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) :

$324u - 245v = 7$

On a : $324(-31) + 245(41) = 1 \Leftrightarrow 324(-31) - 245(-41) = 1$ en multipliant par 7, on a : $324(-217) - 245(-287) = 7$; donc $\boxed{(x_0; y_0) = (-217; -287)}$

* Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation :

$$-\begin{cases} 324u - 245v = 7 \\ 324u_0 - 245v_0 = 7 \end{cases}$$

$$324(u - u_0) - 245(v - v_0) = 0$$

$324(u - u_0) - 245(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow 324(u - u_0) = 245(v - v_0) \Rightarrow$

- $245/324(u + 217) \Rightarrow$d'après Gauss $245/(u + 217)$

  $u + 217 = 245k \Rightarrow u = 245k - 217\ \ , k \in \mathbb{Z}$
- $324/245(v + 287) \Rightarrow$d'après Gauss $324/(v + 287)$

  $v + 287 = 324k \Rightarrow v = 324k - 287\ \ , k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(245k - 217; 324k - 287); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2°) On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$

a) Montrons que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$

La division euclidienne de $n + 16$ par $n - 2$ nous donne :

$\boxed{A(n) = 1 + \frac{18}{n-2}}$ avec $\boxed{a = 1}$ et $\boxed{b = 18}$

b) Les valeurs de n :

$A(n)$ est un entier naturel si $n - 2$ est un diviseur de 18

$(n - 2) \in D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

- $n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3$
- $n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$
- $n - 2 = 3 \Rightarrow n = 5$
- $n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$
- $n - 2 = 9 \Rightarrow n = 11$
- $n - 2 = 18 \Rightarrow n = 20$

A_n est un entier naturel si $\boxed{n \in \{3; 4; 5; 8; 11; 20\}}$

c) Les valeurs de n : On a : $A(n) = 1 + \frac{18}{n-2}$

$A(n)$ est irréductible si $n - 2 = 18k + 1 \Leftrightarrow n = 18k + 3$

Alors $A(n)$ est irréductible si $\boxed{n = 18k + 3}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

3°) Déterminons l'entier naturel n tel que :

$2 \times 3^n + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 2 \times 3^n \equiv 10[11] \Rightarrow 3^n \equiv 5[11]$;

$3^0 \equiv 1[11]$; $3^1 \equiv 3[11]$; $3^2 \equiv 9[11]$; $3^3 \equiv 5[11]$.

Alors $\boxed{n = 3}$

4°) Trouvons les couples d'entiers naturels $(a\,,b)$ tels que :

$$2m - d = 220 \text{ où } m = a \vee b \text{ et } d = a \wedge b$$

$2m - d = 220,$

Soit a' et b' tel que : $a' \wedge b' = 1$ et $a = a'd\,; b = b'd.$

Or $m = a'b'd\,; 2a'b'd - d = 220 \Leftrightarrow 2a'b' - 1 = \frac{220}{d}$ alors $d \in D_{220}$

$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110; 220\}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 1$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{1} \Leftrightarrow a'b' = \frac{221}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 2$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{2} \Leftrightarrow a'b' = \frac{111}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 4$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{4} \Leftrightarrow a'b' = 28$

a'	1	$\cancel{2}$	4
b'	28	$\cancel{14}$	7

- Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4a' = 4(1) = 4 \\ b = 4b' = 4(28) = 112 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4a' = 4(4) = 16 \\ b = 4b' = 4(7) = 28 \end{cases}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 5$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{5} \Leftrightarrow a'b' = \frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 10$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{10} \Leftrightarrow a'b' = \frac{23}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 11$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{11} \Leftrightarrow a'b' = \frac{21}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 20$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{20} \Leftrightarrow a'b' = 6$

a'	1	2
b'	6	3

- Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20a' = 20(1) = 20 \\ b = 20b' = 20(6) = 120 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20a' = 20(2) = 40 \\ b = 20b' = 20(3) = 60 \end{cases}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 22$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{22} \Leftrightarrow a'b' = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $\boldsymbol{d} = 44$:

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{44} \Leftrightarrow a'b' = 3$

Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 44a' = 44(1) = 44 \\ b = 44b' = 44(3) = 132 \end{cases}$

- Pour $d = 55$:

  On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{55} \Leftrightarrow a'b' = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 110$:

  On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{110} \Leftrightarrow a'b' = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 220$:

  On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{220} \Leftrightarrow a'b' = 1$

  Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 220a' = 220(1) = 220 \\ b = 220b' = 220(1) = 220 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(4;112);(16;28);(20;120);(40;60);(44;132);(220;220)\}}$$

Exercice 15 :

1°) Déterminons tous les couples d'entiers naturels : a et b $(a < b)$ tels que : $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$ vérifient $\begin{cases} m + d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$

Soit a' et b' tel que : $a' \wedge b' = 1$ et $a = a'd$; $b = b'd$.

Or $m = a'b'd$; $a'b'd + d = 126 \Leftrightarrow a'b' + 1 = \frac{126}{d}$

alors $d \in D_{126}$ et $5 < d < 10$, donc $d \in \{6;7;9\}$

- Pour $d = 6$:

  On a : $a'b' + 1 = \frac{126}{6} \Leftrightarrow a'b' = 20$

a'	1	$\cancel{2}$	4
b'	20	$\cancel{10}$	5

  - Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6a' = 6(1) = 6 \\ b = 6b' = 6(20) = 120 \end{cases}$
  - Si $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6a' = 6(4) = 24 \\ b = 6b' = 6(5) = 30 \end{cases}$
- Pour $d = 7$:

  On a : $a'b' + 1 = \frac{126}{7} \Leftrightarrow a'b' = 17$

  Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7a' = 7(1) = 7 \\ b = 7b' = 7(17) = 119 \end{cases}$
- Pour $d = 9$:

  On a : $a'b' + 1 = \frac{126}{9} \Leftrightarrow a'b' = 13$

  Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9a' = 9(1) = 9 \\ b = 9b' = 9(13) = 117 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(6;120);(24;30);(7;119);(9;117)\}}$$

2°) Effectuons la division euclidienne de a par b :

$a = -532$ et $b = -71$.

$a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$

$532 = 71(7) + 35$

$-532 = -71(7) - 35 = -71(7) - 35 - 71 + 71$

$-532 = -71(8) + 36$;

alors $\boxed{a = -532; b = -71; q = 8; r = 36}$

3°) <u>Effectuons les opérations suivantes</u> :

$\overline{\text{FACE}}^{16} - \overline{\text{BEC}}^{16} = \overline{\text{EEE2}}^{16}$

$\overline{3421}^{5} + \overline{240}^{5} = \overline{4211}^{5}$

$\overline{3421}^{5} \times \overline{230}^{5} = \overline{2002330}^{5}$

<u>Exercice 16</u> :

I/ 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a)* <u>Déterminons, suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n</u> :

$3^0 \equiv 1[7]$	$3^6 \equiv 1[7]$
$3^1 \equiv 3[7]$	La période est 6 donc :
$3^2 \equiv 2[7]$	- Pour $n = 6k$, on a : $3^{6k} \equiv 1[7]$
$3^3 \equiv 6[7]$	- Pour $n = 6k + 1$, on a : $3^{6k+1} \equiv 3[7]$
$3^4 \equiv 4[7]$	- Pour $n = 6k + 2$, on a : $3^{6k+2} \equiv 2[7]$
$3^5 \equiv 5[7]$	- Pour $n = 6k + 3$, on a : $3^{6k+3} \equiv 6[7]$

- Pour $n = 6k + 4$, on a : $3^{6k+4} \equiv 4[7]$
- Pour $n = 6k + 5$, on a : $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

Les restes de la division euclidienne de 3^n par 7 sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6$

* <u>Déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$</u> :

$(506390)^{128} \equiv ?\,[7] \Leftrightarrow 3^{128} \equiv ?\,[7]$, or la division euclidienne de 3^n par 7 a pour période 6. La division euclidienne de 128 par 6 nous donne

$128 = 6(21) + 2 = 6k + 2$, or $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ alors le reste de la division euclidienne de $(506390)^{128}$ par 7 est 2.

b) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.

<u>Déterminons x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7</u> :

$(506390)^{128} + \overline{651x} \equiv 0[7] \Rightarrow 2 + x + 10 + 500 + 6000 \equiv 0[7]$

$x \equiv 5[7] \Rightarrow x = 7k + 5$.

$0 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq 7k + 5 \leq 9 \Rightarrow k = 0$, alors $\boxed{x = 5}$.

2. a) <u>Déterminons le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525</u> :

q	2	3	1	3
a	21950	9525	2540	1905
b	9525	2540	1905	635
r	2540	1905	635	0

Alors $\boxed{\text{PGCD}(21950; 9525) = 635}$

b) <u>Déterminons l'ensemble des entiers x tels que</u> : $34x \equiv 2[15]$

$34x \equiv 2[15] \Rightarrow 4x \equiv 2[15] \Rightarrow x = 15k + 8$.

$$\boxed{S = \{15k + 8; k \in \mathbb{Z}\}}$$

c) <u>Résolvons l'équation</u> : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:

$21590x + 9525y = 1270$

$21590 \wedge 9525 = 635$; $1270/635$, alors on a : $34x + 15y = 2$
$34x \equiv 2[15] \Rightarrow x = 15k + 8$, en remplaçant x dans l'équation
$34x + 15y = 2 \Rightarrow 34(15k + 8) + 15y = 2 \Rightarrow y = -34k - 18$

$$\boxed{S = \{(15k + 8; -34k - 18); k \in \mathbb{Z}\}}$$

d) Déterminons le chiffre des unités de 7^{1980} écrit dans le système décimal :

$7^0 \equiv 1[10]$	La période est 4 donc :
$7^1 \equiv 7[10]$	- Pour $n = 4k$, on a : $7^{4k} \equiv 1[10]$
$7^2 \equiv 9[10]$	- Pour $n = 4k + 1$, on a : $7^{4k+1} \equiv 7[10]$
$7^3 \equiv 3[10]$	- Pour $n = 4k + 2$, on a : $7^{4k+2} \equiv 9[10]$
$7^4 \equiv 1[10]$	- Pour $n = 4k + 3$, on a : $7^{4k+3} \equiv 3[10]$

La division euclidienne de 1980 par 4 nous donne : $1980 = 4(495) = 4k$
or $7^{4k} \equiv 1[10]$, alors le chiffre des unités de 7^{1980} dans le système décimal est 1.

II/ On considère l'entier naturel **A** qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminons x pour que :

a) **A** soit divisible par six :

$A \equiv 0[6] \Leftrightarrow \overline{1x416}^{7} \equiv 0[6] \Rightarrow 6 + 7 + 196 + 343x + 2401 \equiv 0[6]$
$x \equiv 0[6] \Rightarrow x = 6k$; or $0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6k \leq 6 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

$$\boxed{x \in \{0; 6\}}$$

b) **A** soit divisible par cinq :

$A \equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{1x416}^{7} \equiv 0[5] \Rightarrow 6 + 7 + 196 + 343x + 2401 \equiv 0[5]$
$3x \equiv 0[5] \Rightarrow x = 5k$; or $0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 5k \leq 6 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

$$\boxed{x \in \{0; 5\}}$$

c) Déduisons qu'il existe x tel que **A** soit divisible par trente :

A est divisible par 30, si **A** est divisible à la fois par 5 et 6

$\begin{cases} A \equiv 0[6] \text{ ; si } x \in \{0; 6\} \\ A \equiv 0[5] \text{ ; si } x \in \{0; 5\} \end{cases} \Rightarrow x \cap x = 0$; alors $\boxed{x = 0}$

2°) On donne à x la valeur zéro,

* L'écriture décimale de **A** est : $\boxed{\mathbf{A} = \overline{10416}^{7} = 2610}$

* Le nombre de diviseurs positifs de **A** :
On a : $A = 2610 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 29$
nombre de diviseurs est : $(1 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24$
Le nombre de diviseurs positifs est 24

* L'ensemble des diviseurs positifs de **A** qui sont premiers avec trois sont :
$1; 2; 5; 10; 29; 58; 145; 290$.

Exercice 17 :

I/ 1°) Montrons que :

$4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$
$(2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$ après développement

on a : $4x^4 + 3x^2 + 1 = 4x^4 + 3x^2 + 1$ vraie. C.Q.F.M

2°) Déduisons que dans tout système de numération de base b supérieure ou égale à 5 : $b \geq 5$

Le nombre $\overline{40301}$ est divisible par $\overline{211}$:

$\overline{40301}^b = 1 + 3b^2 + 4b^4$; $\overline{211}^b = 1 + b + 2b^2$

$\overline{40301}^b = (2b^2 + b + 1)(2b^2 - b + 1)$

$= \overline{211}^b \times (b^2 + b^2 - b + 1)$

$= \overline{211}^b \times (b^2 + b(b-1) + 1)$

$\boxed{\overline{40301}^b = \overline{211}^b \times \overline{1(b-1)1}^b}$ alors $\overline{40301}^b$ est divisible par $\overline{211}^b$.

3°) Le quotient de la division :

$\overline{40301}^9 = 26488$ et $\overline{211}^9 = 172$,

On a : $q = 2b^2 - b + 1 = 2(9)^2 - 9 + 1 \Rightarrow \boxed{q = 154}$

II/ Dans le système de numération de base 3, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^3$.

1°) Le système de numération n dans lequel il s'écrit : $\overline{224}^n$

$\overline{224}^n = \overline{2101}^3 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \in \mathbb{N}; 5 > 4 \\ n_2 = -6 \notin \mathbb{N}; -6 < 4 \end{cases}$

Alors on a : $\boxed{\overline{224}^5}$.

2°) Le système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$

Soit x le système de numération avec $x > 7$ et $x \in \mathbb{N}$:

$\overline{174}^x = \overline{2101}^3 \Leftrightarrow -x^2 - 7x + 60 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \in \mathbb{N}; 5 < 7 \\ x_2 = -12 \notin \mathbb{N}; -12 < 7 \end{cases}$

Alors il n'existe pas de système de numération dans lequel il s'écrit $\overline{174}$.

3°) Soit $\boldsymbol{a}$ un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère les nombres $\mathrm{N} = 2(\boldsymbol{a} - 1)$ et $\mathrm{N}' = (\boldsymbol{a} - 1)^2$.

Écrivons N et N' dans le système de base $\boldsymbol{a}$:

* $\mathrm{N} = 2(\boldsymbol{a} - 1) = 2\boldsymbol{a} - 2 = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} - 2)$

Alors $\boxed{\mathrm{N} = \overline{1(\boldsymbol{a} - 2)}^a}$

* $\mathrm{N}' = (\boldsymbol{a} - 1)^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a} + 1 = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} - 2) + 1$

Alors $\boxed{\mathrm{N}' = \overline{(\boldsymbol{a} - 2)1}^a}$

4°) Démontrons :

$\overline{1331}^b = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \Leftrightarrow \boxed{\overline{1331}^b = (b+1)^3}$ C.Q.F.D

III/ 1°) La taille maximale de ces dalles :

PGCD$(475; 361) = 19$, à l'aide de dalles carrées de $19cm$ de côté, on peut donc carreler une surface rectangulaire de $4{,}75m$ sur $3{,}61m$

(il faudra 19 dalles en longueur et 25 en largeur, soit un total de 475 dalles en tout)

2°) Soit le nombre $\boldsymbol{n}$ qui s'écrit dans la base dix, $\boldsymbol{n} = y17x35$;

<u>Trouvons x et y pour que $\boldsymbol{n}$ soit divisible par 9 et 11</u> :

* $\boldsymbol{n}$ est divisible par 9 si : $y + 1 + 7 + x + 3 + 5 \equiv 0[9]$

$x + y \equiv 2[9]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + y = 9k + 2$. (**1**)

* $\boldsymbol{n}$ est divisible par 11 si : $5 - 3 + x - 7 + 1 - y \equiv 0[11]$

$x - y \equiv 4[11]$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - y = 11k' + 4$. (**2**)

On a : $x + y = 9k + 2$

$$\begin{array}{rl} & 0 < x \leq 9 \\ + & 0 < y \leq 9 \\ \hline & 0 < x + y \leq 18 \end{array}$$

$0 < 9k + 2 \leq 18$

$-0{,}22 < k \leq 1{,}77$

Alors $k \in \{0; 1\}$

On a : $x - y = 11k' + 4$

$$\begin{array}{r} 0 < x \leq 9 \\ -9 < -y \leq 0 \\ \hline -9 < x - y \leq 9 \end{array}$$

$-9 < 11k' + 4 \leq 9$

$-1{,}18 < k' \leq 0{,}45$

Alors $k' \in \{-1; 0\}$

Formons un système avec l'équation (**1**) et (**2**) :

- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases}$

Alors on a : $\boxed{\boldsymbol{n} = \mathbf{917235}}$

<u>Exercice 18</u> :

1°) <u>Calculons le nombre de carreaux non découpées</u> :

$454 = 33 \times 13 + 25$ et $375 = 33 \times 11 + 12$, il faut plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de 11 carreaux en largeur, donc un nombre de carreaux non coupés égal à $11 \times 13 = 143$.

2°) a) <u>Donnons la liste des diviseurs</u> :

$\boxed{D_{455} = \{1; 5; 7; 13; 35; 65; 91; 455\}}$

$\boxed{D_{385} = \{1; 5; 7; 11; 35; 55; 77; 385\}}$

b) $\boxed{D_{455} \cap D_{385} = \{1; 5; 7; 35\}}$

c) On peut donc utiliser des dalles de côté $35\ cm$ pour carreler la cuisine. Il en faudra 13 en longueur et 11 en largeur.

3°) On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24cm$ et de largeur $15cm$.

a) * <u>Donnons la liste des multiples de 24 inférieurs à 400</u> :

$\boxed{M_{24} = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; 312; 336; 360; 384\}}$

* <u>La liste des multiples de 15 inférieurs à 400</u> :

$\boxed{\begin{array}{c} M_{15} = 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150; 165; 180; 195; 210; 225; 240; 255; 270; \\ 285; 300; 315; 330; 345; 360; 375; 390 \end{array}}$

b) <u>Donnons la liste des multiples communs à 24 et 15 inférieurs à 400</u> :

$$\boxed{M_{24} \cap M_{15} = \{120; 240; 360\}}$$

c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de $120\ cm$ de côté avec des carreaux de longueur $24\ cm$ et de largeur $15\ cm$.

Exercice 19 :

I/ L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminons les chiffres x et y :

$0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 6$;

* $m_1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{1x00y2}^8 \equiv 0[5] \Rightarrow x + 3y \equiv 0[5]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 3y = 5k$. (1)

* $m_2 \equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{x1y003}^7 \equiv 0[5] \Rightarrow 2x + 3y \equiv 1[5]$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $2x + 3y = 5k' + 1$. (2)

$$\begin{cases} x + 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow x \equiv 1[5] \Rightarrow x = 5k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$$

$0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 5k + 1 \leq 6$, alors $k \in \{0; 1\}$

$$\begin{cases} \text{Si } k = 0; x = 1 \\ \text{Si } k = 1; x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow 2y \equiv 1[5] \Leftrightarrow y \equiv 3[5], k \in \mathbb{Z}$$

$y = 5k + 3$

$0 \leq y \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 5k + 3 \leq 6$, alors $k = 0 \Rightarrow y = 3$.

Pour que chacune des commerçantes puisse avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues, il faut que : $\boxed{x = 6}$ et $\boxed{y = 3}$.

2°)* Déterminons le montant que dispose chacune des commerçantes :

$m_1 = \overline{160032}^8 = 57370$ F et $m_2 = \overline{613003}^7 = 104275$ F

* Déduisons le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter :

Awa peut acheter 11474 mangues et Fanta peut acheter 20855 mangues

3°) a) $\boxed{m_1 = 57370 = 5 \times 2 \times 5737}$

$\boxed{m_2 = 104275 = 5^2 \times 43 \times 97}$

b)* Déduisons le nombre de diviseurs :

Pour m_1 le nombre de diviseur est : $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$

Pour m_2 le nombre de diviseur est : $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$

* $\boxed{\text{PGCD}\ (m_1\ ;\ m_2) = 5}$

4°) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1\mathrm{u} + m_2\mathrm{v} = 5$

$57370\mathrm{u} + 104275\mathrm{v} = 5 \Leftrightarrow 11474\mathrm{u} + 20855\mathrm{v} = 1$

Recherche d'une solution particulière :

q	1	1	4	2	13	2	4	1	6
a	20855	11474	9381	2093	1009	75	34	7	6
b	11474	9381	2093	1009	75	34	7	6	1
r	9381	2093	1009	75	34	7	6	1	0

On a : $11474(3059) + 20855(-1683) = 1$, une solution particulière de l'équation $11474u + 20855v = 1$ est $(u_0; v_0) = (3059; -1683)$

$$-\begin{cases} 11474u + 20855v = 1 \\ 11474u_0 + 20855v_0 = 1 \end{cases}$$

$$11474(u - u_0) + 20855(v - v_0) = 0$$

$11474(u - u_0) + 20855(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow 11474(u - u_0) = 20855(-v + v_0) \Rightarrow$

- $20855/11474(u - 3059) \Rightarrow$d'après Gauss $20855/(u - 3059)$
  $u - 3059 = 20855k \Leftrightarrow u = 20855k + 3059$.
- $11474/20855(-v - 1683) \Rightarrow$d'après Gauss $11474/(-v - 1683)$
  $-v - 1683 = 11474k \Leftrightarrow v = -11474k - 1683$.

$$\boxed{S = \{(20855k + 3059; -11474k - 1683) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$

II/ Cherchons la combinaison :

On a : $\overline{xyzth}$ en base 10, alors

$0 \leq x \leq 9$; $0 \leq y \leq 9$; $0 \leq z \leq 9$; $0 \leq t \leq 9$; $0 \leq h \leq 9$

* Le premier chiffre est pair, alors $x \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$;
* La somme des deux premiers chiffres est 15, alors $x + y = 15$;
* Le troisième est la différence des deux premiers, alors $x - y = z$;
* Le 1^{er} chiffre est le produit du troisième par le quatrième, alors $z \cdot t = x$;
* Le nombre est divisible par 9, alors $x + y + z + t + h \equiv 0[9]$.

La valeur de x qui vérifie tous les conditions est 8 ; donc :

$x + y = 15 \Rightarrow \boxed{x = 8}$ et $\boxed{y = 7}$

$x - y = z \Rightarrow \boxed{z = 1}$; $z \cdot t = x \Rightarrow \boxed{t = 8}$

$x + y + z + t + h \equiv 0[9] \Leftrightarrow h \equiv 3[9] \Rightarrow h = 9k + 3 \Rightarrow \boxed{h = 3}$

La combinaison cherchée est : **87183**

Exercice 20 :

On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\,, y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1°) a) Une solution particulière de l'équation (E) est le couple $\boxed{(x\,, y) = (2; -3)}$

b) Résolvons l'équation (E) :

$8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x = 1 - 5y \Rightarrow 8x \equiv 1[5] \Rightarrow x = 5k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$ en remplaçant x par sa valeur dans l'équation $8x + 5y = 1$, on a : $y = -8k - 3$

$$\boxed{S = \{(5k + 2; -8k - 3);\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

2°) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\,, b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$

a) Montrons que le couple$(a, -b)$ est solution de (E) :

On sait que : $N = N \Leftrightarrow 8a - 5b = 1 \Leftrightarrow 8a + 5(-b) = 1$ alors $(a, -b)$ est une solution de (E).

b) Le reste de la division de N par 40 :

D'après la relation qui vérifie N, on a : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$

D'après 2)a), $(a, -b)$ est une solution de (E), par suite

$\begin{cases} a = 5k+2 \\ -b = -8k-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5k+2 \\ b = 8k+3 \end{cases}$; en remplaçant a dans N,

on a : $N = 8a + 1 = 8(5k+2)+1 \Rightarrow N = 40k + 17 \Leftrightarrow N \equiv 17[40]$ alors le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3°) a) Résolvons l'équation : $8x + 5y = 100$

$8x + 5y = 100 \Leftrightarrow 5y = 100 - 8y \Leftrightarrow 5y \equiv 4[8] \Rightarrow y \equiv 4[8]$

$y = 8k + 4\,, k \in \mathbb{Z}$ en remplaçant y par sa valeur dans l'équation $8x + 5y = 100$, on a : $x = -5k + 10$

$$\boxed{S = \{(-5k+10; 8k+4) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$

b) Soit α le nombre d'hommes et β le nombre de femmes :

D'après l'énoncé, on a : $8\alpha + 5\beta = 100$

D'après 3)a) on a : $\alpha = -5k + 10$ et $\beta = 8k + 4$

$\begin{cases} \alpha > 0 \Leftrightarrow -5k + 10 > 0 \Rightarrow k < 2 \\ \beta > 0 \Leftrightarrow 8k + 4 > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

- Si $k = 0$, on a : $\alpha = 10$ et $\beta = 4$
- Si $k = 1$, on a : $\alpha = 5$ et $\beta = 12$

Exercice 21 :

I/1°) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 631$

$x^3 - y^3 = 631 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 631$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 631 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ (1+y)^2 + (1+y)y + y^2 = 631 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 3y^2 + 3y + 1 = 631 \end{cases}$; L'équation $3y^2 + 3y + 1 = 631 \Leftrightarrow y^2 + y - 210 = 0$ a pour solution dans $\mathbb{N}$, $y = 14$. Si $y = 14$ alors $x = 15$.

$$\boxed{S = \{(15; 14)\}}$$

2°) a) * Le reste de la division euclidienne :

* De 111 par 7 : est 6

* De 10^n par 7 :

$10^0 \equiv 1[7]$; $10^1 \equiv 3[7]$; $10^2 \equiv 2[7]$; $10^3 \equiv 6[7]$; $10^4 \equiv 4[7]$

$10^5 \equiv 5[7]$; $10^6 \equiv 1[7]$

La période est 6 donc :

- Pour $n = 6k$, on a : $10^{6k} \equiv 1[7]$

- Pour $n = 6k + 1$, on a : $10^{6k+1} \equiv 3[7]$
- Pour $n = 6k + 2$, on a : $10^{6k+2} \equiv 2[7]$
- Pour $n = 6k + 3$, on a : $10^{6k+3} \equiv 6[7]$
- Pour $n = 6k + 4$, on a : $10^{6k+4} \equiv 4[7]$
- Pour $n = 6k + 5$, on a : $10^{6k+5} \equiv 5[7]$

Les restes de la division euclidienne de 10^n par 7 sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6$

b) Soit l'entier naturel N $= 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111$.

- Montrons que N peut s'écrire en fonction de 111 :

$$N = 111 + 2 \times 111 \times 10^3 + 3 \times 111 \times 10^6 + 4 \times 111 \times 10^9 + 5 \times 111 \times 10^{12} + 6 \times 111 \times 10^{15} + 7 \times 111 \times 10^{18} + 8 \times 111 \times 10^{21} + 9 \times 111 \times 10^{24}$$

$$\boxed{N = 111(1 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^9 + 5 \times 10^{12} + 6 \times 10^{15} + 7 \times 10^{18} + 8 \times 10^{21} + 9 \times 10^{24})}$$

- Le reste de la division euclidienne de N par 7 :

$N \equiv 6(1 + 5 + 3 + 3 + 5 + 1 + 0 + 6 + 2)[7] \Leftrightarrow N \equiv 2[7]$ alors le reste de la division euclidienne de N par 7 est 2.

Exercice 22 :

1) $L = 525\ m\,;\ l = 285\ m$

Calculons :

a) La distance comprise entre deux arbres : C'est le $\text{PGCD}(525; 285) = 15$.

La distance comprise entre deux arbres est $15\ m$.

b) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ :

Le périmètre du champ : $P = 2(L + l) = 2(525 + 285) = 1620 \Rightarrow P = 1620$.

Le nombre d'arbres est : $n = \frac{P}{\text{PGCD}(525;285)} = \frac{1620}{15} \Rightarrow \boxed{n = 108}$ on a 108 arbres.

2) On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

a) Vérifions que le couple $(-7\,;\ -3)$ est une solution de (E) :

$11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1$ donc le couple $(-7\,;\ -3)$ est une solution de (E)

b) Résolvons l'équation (E) : $11x - 26y = 1$

$$- \begin{cases} 11x - 26y = 1 \\ 11x_0 - 26y_0 = 1 \end{cases}$$

$$11(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0$$

$11(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 11(x - x_0) = 26(y - y_0) \Rightarrow$

- $26/11(x + 7) \Rightarrow$d'après Gauss $26/(x + 7)$

  $x + 7 = 26k \Rightarrow x = 26k - 7\ ,k \in \mathbb{Z}$

- $11/26(y + 3) \Rightarrow$d'après Gauss $11/(y + 3)$

  $y + 3 = 11k \Rightarrow y = 11k - 3\ ,k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(26k - 7; 11k - 3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$

3) Déduisons le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$

D'après 2) on a : $p = 26k - 7$ et $q = 11k - 3$

$0 \leq p \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq 26k - 7 \leq 25 \Leftrightarrow 0{,}26 \leq k \leq 1{,}25$, alors $k = 1$ et les valeurs de p et q sont : $p = 19$ et $q = 8$ d'où le couple $\boxed{(p; q) = (19; 8)}$

II/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ (avec $a \in \mathbb{N}$).

1°) Démontrons que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés :

Soit $n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2}$ $\quad a > b$; $a \in \mathbb{N}$; $b \in \mathbb{N}$

$$4n + 1 = 2a^2 + 2a + 2b^2 + 2b = (a^2 + 2a + 2b + 1 + b^2) + a^2 + b^2$$
$$= (a + b + 1)^2 - 2ab + a^2 + b^2 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2$$

Alors $4n + 1 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2$ est la somme de deux carrés. C.Q.F.D

2°) On pose $n = 3$.

$4n + 1 = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ Vraie.

3 n'est pas la somme de deux nombres triangulaires mais $4(3) + 1$ est la somme de deux carrés donc la réciproque de la propriété **1°)** est fausse.