Exercice 1:

$P(x)=2x^3+x^2-13x\text{-}6$

1) Calculons $\mathrm{P}(-2)$

$\mathrm{P}(-2)=2(-2)^3+(-2)^2-13(-2)=-16-4+26-6=0$ $(0{,}5pt)$

2) Determinons les réels a,b et c tels que $P(x)=(x+2)(ax^2+bx+\mathrm{c})$.

1*ière* *Methode*

	2	-1	-13	-6
-2		-4	10	6
	2	-5	-3	0

$P(x)=(x+2)(2x^2-5x-3)$

$a=2$; $b=-5$; $c=-3$ $(1pt)$

2*ième* *Methode* :

$$P(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c$$
$$=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$$

Par identification

$$\begin{cases} a=2 \\ b+2a=-1 \\ c+2b=-13 \\ 2c=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=-3 \end{cases}$$

3*ieme* *Methode* :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-13x-6 & x+2 \\ \hline -2x^3-4x^2 & \\ -5x^2-13x-6 & \\ 5x^2+10x & 2x^2-5x-3 \\ -3x-6 & \\ 3x+6 & \end{array}$$

$P(\mathrm{x})=(x+2)(2x^2-5x-3)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$,l'équation $P(x)=0$.

$P(x)=0 \Longrightarrow (x+2)(2x^2-5x-3)=0$

$x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

$2x^2-5x-3=0$

$\Delta=25+24=49$

$\mathrm{x}_1=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}$;$\mathrm{x}_2=\dfrac{5+7}{4}=\dfrac{12}{4}=3$

$\mathrm{S}=\left\{-2;\dfrac{-1}{2};3\right\}$ $(1pt)$

4) *En deduisons*

a) $2(\ln x)^3-(\ln x)^2-13(\ln x)-6=0$

$x\in]0;+\infty[$

Posons $\ln x=X$

$X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$
$X = -2 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$
$X = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$
$X = \frac{-1}{2} \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{-1}{2}}$

S = $\left\{e^{-2}; e^3; e^{\frac{-1}{2}}\right\}$ $(0,75pt)$
b) $2e^{3x} - e^{2x} - 13e^x - 6 = 0$
Posons $e^x = X$
$X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$

$X = -2 \Rightarrow e^x = -2$ (imp)
$X = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$
$X = \frac{-1}{2} \Rightarrow e^x = -\frac{1}{2}$ (imp)

S = $\{\ln 3\}$ $(0,75pt)$

Exercice 2:

1) Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$ $(0,\ 5pt)$; $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ $(0,\ 5pt)$; $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$ $(0,\ 5pt)$;

$f(\frac{1}{e}) = \frac{\ln(\frac{1}{e})}{\frac{1}{e}} = -1 \times e = -e$ $(0,5pt)$; $f(e^3) = \frac{\ln e^3}{e^3} = \frac{3\ln e}{e^3} = \frac{3}{e^3}$ $(0,5pt)$

2) $g(x) = e^{-2x^2+1}$
a) Calculons g' (x)
g' (x) $= -4xe^{-2x^3+1}$ $(2pts)$
b) Equation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$
$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$
$x_0 = 0 \Rightarrow y = g'(0)(x - 0) + g(0)$
$g'(0) = 0; g(0) = e$
$y = 0(x) + e \Rightarrow y = e.$ $(1,5pts)$

Problème:

$f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ $x \in [0; +\infty[$

1) Déterminons les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$

pour $x \in [0; +\infty[$.

$f(x) = a + \frac{b}{x+10} = \frac{a(x+10)+b}{x+10} = \frac{ax+10a+b}{x+10}$

Par identification:

$$\begin{cases} a = 60 \\ 10a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 60 \\ 600 + b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 60 \\ b = -560 \end{cases}$$

$f(x) = 60 - \frac{560}{x+10}$ $(1pt)$

2) $f'(x) = -\left(\dfrac{-560}{(x+10)^2}\right) = \dfrac{560}{(x+10)^2} > 0$ (1,5*pts*) $\Longrightarrow$ $\forall$ $x \in [0;+\infty[; f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ *est* strictement croissante *sur* $[0;+\infty[$ *d*'où la population croit. (1,5pts)

3) a) $f(x) = 52$ $D_v = D_f = [0;+\infty[$

$f(x) = 52 \Longrightarrow 60 - \dfrac{560}{x+10} = 52 \Longrightarrow -\dfrac{560}{x+10} = -8 \Longrightarrow \dfrac{560}{x+10} = 8$

$560 = 8(x+10) \Rightarrow 560 = 8x + 80 \Longrightarrow 560\text{-}80 = 8x \Longrightarrow 480 = 8x \Rightarrow x = \dfrac{480}{8} = 60$

$S = \{60\}$. (1pt)

b) $f(x) > 52 \iff x > 60$

Après 1960 + 60 = 2020,*la* population de cette ville sera superieure à 52 000 habitants (*ou à partir de* 2021) (1pt)

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 60 - \dfrac{560}{x+10} = 60$ (1*pt*) $\Longrightarrow$ la population de cette ville ne depassera *jamais* 60 000 habitants. (1*pt*)

5) Courbe

tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$4 \nearrow 60$

y=60 est une asymptote horizontale (2*pts*)