<u>Exercice1</u>:

I. Soit $P(Z) = Z^3 + (2-2\,i)Z^2 + (5-4\,i)Z - 10i.$

1. Calculons $P(2i)$

$P(2i) = (2i)^3 + (2-2i)(2i)^2 + (5-4i)(2i) - 10i = -8i - 8 + 8i + 10i + 8 - 10i = 0$

$P(2i) = 0$

2. Déduisons en une factorisation de $\mathrm{P}(Z)$

<u>Première méthode</u>

$2i$ est une racine de P alors P est divisible $(factorisable)$ par $Z - 2i$

	1	$\mathbf{2-2i}$	$\mathbf{5-4i}$	$\mathbf{-10i}$
$\mathbf{2i}$		$\mathbf{2i}$	$\mathbf{4i}$	$\mathbf{10i}$
	1	**2**	**5**	**0**

$D'où\ P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + 2Z + 5)$

<u>Deuxième méthode:</u> Division euclidienne

$2i$ est une racine de P alors P est divisible (factorisable) par $Z - 2i$

$$
\begin{array}{l|l}
Z^3 + (2-2i)Z^2 + (5-4\,i)Z - 10i & Z - 2i \\
\cline{2-2}
-Z^3 + 2\,iZ^2 & Z^2 + 2Z + 5 \\
\quad 2Z^2 + (5-4\,i)Z & \\
\quad -2Z^2 + 4iZ & \\
\qquad 5Z - 10\,i & \\
\qquad -5Z + 10\,i &
\end{array}
$$

$D'où\ P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + 2Z + 5)$

<u>Troisième méthode</u>: Coefficients indéterminés

$\mathrm{P}(Z)$ est factorisable par $Z - \mathbf{2}i.$ Alors il existe les complexes a;b et c tels que

$P(Z) = (Z - 2i)(aZ^2 + bZ + c) \Leftrightarrow P(Z) = aZ^3 + (b - 2ai)Z^2 + (c - 2bi)Z - 2ic$

Par identification:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ai = 2 - 2i \\ c - 2bi = 5 - 4i \\ -2ic = -10i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases} \qquad D'où\ P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + 2Z + 5)$$

3. Résolvons l'équation $P(Z) = 0$

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z-2i)(Z^2 + 2Z + 5) = 0$

$\Leftrightarrow Z_0 - 2i = \mathbf{0}$ ou $Z^2 + 2Z + 5 = 0$

- $Z - 2i = 0 \Rightarrow Z = 2i$
- $Z^2 + 2Z + 5 = 0$

$\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

$\Rightarrow Z_1 = -1 - 2i$ ***et*** $Z_2 = -1 + 2i$

$\boldsymbol{S = \{2i;\ -1-2i;\ -1+2i\}}$

II. On observe qu'il s'agit d'une loi binomiale de parametre $\mathrm{n} = \mathbf{20}$ et de probabilité $\mathrm{P} = 0,\ 75$

$q = \mathbf{1} - p = \mathbf{0{,}25}$.

Soit x la variable aléatoire correspondant au nombre de personne protégées parmi les **20.**

Pour $\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{20}$ *on* a $\boldsymbol{P(x=k) = C_{20}^{k} \times (0{,}75)^{k}(0{,}25)^{n-k}}$

Calculons la probabilité pour que:

a. Aucune personne ne soit protégée

$\boldsymbol{P(x=0) = C_{20}^{0} \times (0{,}75)^{0}(1-0{,}75)^{20} = 9{,}09 \times 10^{-13}}$ ***Soit*** $\boldsymbol{9{,}09 \times 10^{-13}}$

b. La moitié est protégée

$\boldsymbol{P(x=10) = C_{20}^{10} \times (0{,}75)^{10}(1-0{,}75)^{10} = 9{,}9 \times 10^{-3}}$ ***Soit*** $\boldsymbol{9{,}9 \times 10^{-3}}$

c. Les 20 personnes soient protégées

$\boldsymbol{P(x=20) = C_{20}^{20} \times (0{,}75)^{20}(1-0{,}75)^{0} = 0{,}031}$ ***Soit*** $\boldsymbol{31{,}71 \times 10^{-2}}$**.**

Exercice 2: On donne la suite (Rn) définie par $R_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n$ *avec* $R_0 = 100$ et la suite (Un) définie par $U_n = R_n + \dfrac{100000}{65}$.

4. Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

$$\boldsymbol{U_{n+1} = R_{n+1} + \frac{100000}{65}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n + \frac{100000}{65}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{106500}{65} + \frac{1065}{1000}R_n}$$

$$\boldsymbol{= 1{,}065\left(\frac{100000}{65} + R_n\right)}$$

$\boldsymbol{U_{n+1} = 1{,}065U_n}$. *Alors* $\forall\, n \in N$ (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}065$.

5. Exprimons Un en fonction de n puis déduisons R_n en fonction de n

$$\boldsymbol{U_n = U_0 \times q^n = \frac{21300}{13} \times 1{,}065^n}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow U_n = \frac{21300}{13} \times (1{,}065)^n} \textbf{ ou encore } U_n = \boldsymbol{1638{,}46(1{,}065)^n} \textit{ ou encore } \boldsymbol{U_n = \frac{106500}{65} \times (1{,}065)^n}.$$

On sait que $\boldsymbol{U_n = R_n + \dfrac{100000}{65} \Leftrightarrow R_n = U_n - \dfrac{100000}{65}}$

$$\boldsymbol{R_n = \frac{21300}{13} \times 1{,}065^n - \frac{100000}{65}} \textbf{ ou encore } \boldsymbol{R_n = \frac{106500}{65} \times 1{,}065^n - \frac{100000}{65}}$$

ou encore $\boldsymbol{R_n = 1638{,}46 \times 1{,}065^n - 1538{,}46}$

6. Le temps d'attente pour ateindre 90% de saturation

A 90% de saturation; le nombre de bactérie est 900. alors $R_n = 900$

$$\frac{21300}{13} \times 1{,}065^n - \frac{100000}{65} = 900 \Leftrightarrow \frac{21300}{13} \times 1{,}065^n = \frac{158500}{65}$$

$$\frac{21300}{13} \times 1{,}065^n = \frac{31700}{13} \Leftrightarrow 1{,}065^n = \frac{317}{213} \Leftrightarrow n\ln(1{,}065) = \ln\left(\frac{317}{213}\right)$$

$$n = \frac{\ln 317 - \ln 213}{\ln 1{,}065} = 6{,}31 \approx 7$$

Alors c'est apres 7 heures que la colonie sera à 90% de saturation.

Problème: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ *et* (Cf) *sa coube*

1. L'ensemble de définition

$Df=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

2. Les variations de f

$f'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}$

$f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}; e^{-x}>0$ le signe de f' depend de $(x-1)(1-x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ *ou* $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ $f'(x)\le 0$ alors f est décroissante

Pour $x\in[-1;1]$ $f'(x)\ge 0$ alors f est croissante.

3. Montrons que f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on precisera

$f(1)=4e^{-1}=\dfrac{4}{e}$ *et*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$

Sur $]1,+\infty[$ *La* fonction f est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $[1;+\infty[$ *vers* $f([1;+\infty[)=\,]0;4e^{-1}]$ Alors $J=]0;4e^{-1}]=\left]0;\dfrac{4}{e}\right]$

4. Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e}$	$\searrow$	0

5. Trouvons une équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle

(T): $y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow (T)$: $y=x+1$ $\quad (f'(0)=f(0)=1)$

6. *Trouvons les coordonnées de*s points d'intersection avec les axes du repère

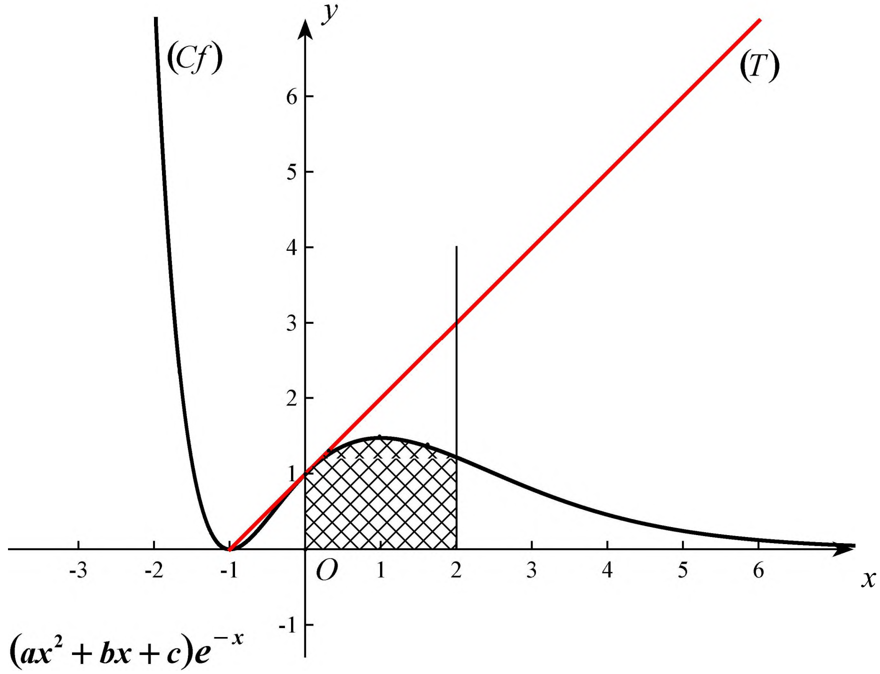
$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2e^{-x}=0 \Longrightarrow x=-1$ *car* $e^{-x}>0$

$(Cf)\cap(OX)=\{A(-1;0)\}$

$f(0)=1$ $\quad (Cf)\cup(OX)=\{B(0;1)\}$

d'où l'intersection de (Cf) *avec l'axe des ordonnées à pour coordonné* $(0;1)$.

7. *Traçons* (Cf) *et* (T)



8. On donne $\boldsymbol{F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}}$

a. Déterminer a , b *et* c pour que F soit une primitive de f *sur* $\mathbb{R}$

Si F est une primitive de f alors $\boldsymbol{F'(x)=f(x)}$

$\boldsymbol{F'(x)}=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}$

$F'(x)=(-ax^2-bx-c+2ax+b)e^{-x}$

$F'(x)=\boldsymbol{f(x)} \Leftrightarrow \ \boldsymbol{(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}}$

Par identification on a $\begin{cases}\boldsymbol{-a=1}\\ \boldsymbol{2a-b=2}\\ \boldsymbol{b-c=1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{a=-1}\\ \boldsymbol{b=-4}\\ \boldsymbol{c=-5}\end{cases}$

b. Calculons l'aire du domaine

1ère*possibilité*: *L'aire comprise entre* (Cf), (Ox) *et les droites d'équation* $x=\mathbf{0}$ *et* $x=\mathbf{2}$

$$\boldsymbol{A_1=\int_0^2 f(x)\,dx\times u_a=\int_0^2 (x+1)^2e^{-x}dx=[F(2)-F(0)]_0^2=-17e^{-2}+5}$$

$\boldsymbol{A_1=-17e^{-2}+5\ \text{cm}^2=2{,}69\text{cm}^2}$

<u>2</u>^{ème}<u>*possibilité*</u>: *L'aire comprise entre* (Cf), (T) *et les droites d'équation* $x=\mathbf{0}$ *et* $x=\mathbf{2}$

$$A_2=\left[\int_0^2 (y-f(x))\,dx\right]\times u_a$$

$$A_2=\int_0^2 (y-f(x))dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x-F(x)\right]_0^2 \textit{ avec } \boldsymbol{A_1=-17e^{-2}+5}$$

$A_2=\mathbf{4}-A_1=\mathbf{17}e^{-2}-\mathbf{1} \ \Leftrightarrow \ A_2=\mathbf{1{,}30}$

<u>3</u>^{ème} <u>*possibilité*</u>: *L'aire comprise entre* (T), (Ox) *et les droites d'équation* $x=\mathbf{0}$ *et* $x=\mathbf{2}$

$A_3=A_1+A_2=-\mathbf{1}+\mathbf{17}e^{-2}+\mathbf{5}-\mathbf{17}e^{-2}$

$A_3=\mathbf{4cm}$

<u>Autre méthode</u>:

$$A_3=\left[\int_0^2 (x+1)\,dx\right]u_a=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2 u_a$$

$A_3=\mathbf{4cm^2}$