Exercice 1 :

D'après l'énonce on a :

$\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct. M_n les points affixes $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1+i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1. Exprimons Z_{n+1} en fonction de Z_n puis en fonction de Z_0 et n.

$Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}iZ_n$ d'où $Z_{n+1}=\frac{1}{2}i\,Z_n$.

Z_n en fonction de Z_0 et n.

$Z_{n+1} = \frac{1}{2}i\,Z_n$ signifie que Z_n est une suite géométrique de premier terme Z_0 et de raison $\frac{1}{2}i$.

$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n Z_0$.

2. Donnons Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

<u>*Première méthode :*</u>

- Pour Z_0 :

  Forme algébrique :

  $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

  Forme trigonométrique :

  Module de Z_0 : $\left|Z_0\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.

  Soit $\theta_0 = Arg(Z_0)$: $\begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}$ d'où $Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

- Pour Z_1 :

  Forme algébrique : $Z_1 = \frac{1}{2}i\,Z_0 = \frac{1}{2}i\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ d'où $Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

  Forme trigonométrique :

  Module : $\left|Z_1\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

  Soit $\theta_1 = Arg(Z_1)$: $\begin{cases} \cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ d'où $Z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{6}$

- Pour Z_2 :

  Forme algébrique : $Z_2 = \left(\frac{1}{2}i\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ d'où $Z_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

  Forme trigonométrique :

Module : $\left|Z_2\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$

Soit $\theta_2 = Arg(Z_2)$: $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

d'où $Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

- Pour Z_3 :

Forme algébrique : $Z_3 = \left(\frac{1}{2}i\right)^3\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{8}i\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$ d'où $Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

Forme trigonométrique :

Module : $\left|Z_3\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^3} = \frac{1}{4}$

Soit $\theta_3 = Arg(Z_3)$: $\begin{cases} \cos\theta_3 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = -\dfrac{\pi}{6}$ d'où $Z_3 = \dfrac{1}{4}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

- Pour Z_4 :

Forme algébrique : $Z_4 = \left(\frac{1}{2}i\right)^4\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$ d'où $Z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$

Forme trigonométrique :

Module : $\left|Z_4\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2} = \frac{1}{8}$

Soit $\theta_4 = Arg(Z_4)$: $\begin{cases} \cos\theta_4 = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_4 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \dfrac{\pi}{3}$ d'où $Z_4 = \dfrac{1}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Deuxième méthode :

Forme algébrique de Z_n :

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n Z_0 = \frac{1}{2^n}\, i^n \left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2^n} i^n + \frac{\sqrt{3}}{2^n} i^{n+1}.$$

Forme trigonométrique de Z_n :

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n Z_0 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n ; \frac{n\pi}{2}\right] \times \left[2 ; \frac{\pi}{3}\right] = \left[2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-1}} ; \frac{(3n+2)\pi}{6}\right]$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\left(\frac{3n+2}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3n+2}{6}\pi\right)\right]$$

- Pour $n = 0$:

  La forme algébrique de $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

- Pour $n = 1$:

  La forme algébrique de $Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_1 = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

- Pour $n = 2$:

  La forme algébrique de $Z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

- Pour $n = 3$:

  La forme algébrique de $Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

- Pour $n = 4$:

  La forme algébrique de $Z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Troisiéme méthode

Formes algébriques :

$Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$$Z_1 = \frac{1}{2}i\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}i\left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$$

$$Z_4 = \frac{1}{2}i\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i\right) = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$$

Formes trigonométriques :

$$Z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

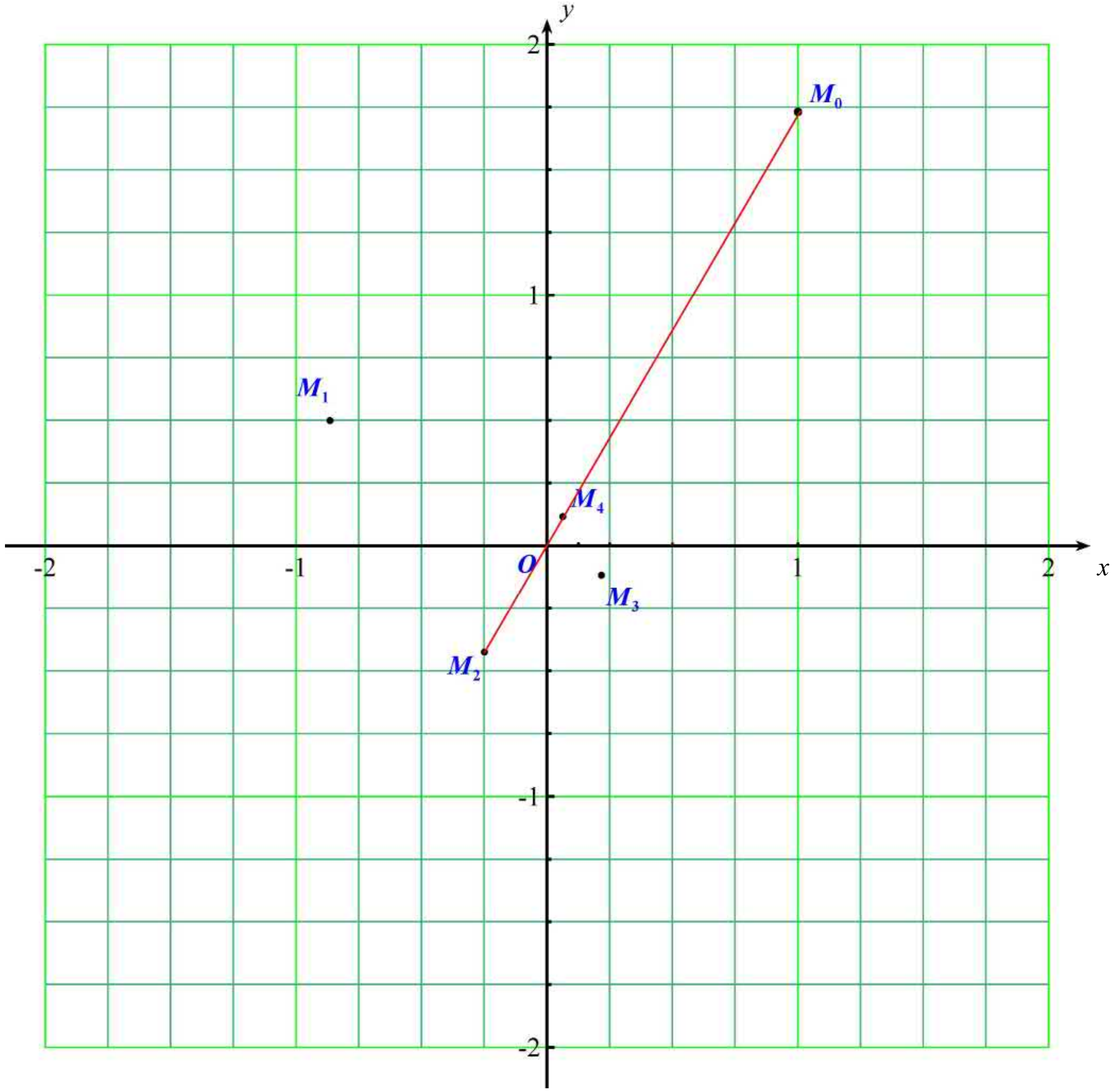
$$Z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

$$Z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$$

3. Plaçons les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4



4. Déterminons la distance OM_n en fonction de n. :

$$OM_n = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (0,5)$$

5. *a.* Montrons que $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_nM_{n+1} = \left|Z_{n+1} - Z_n\right| = \left|\frac{1}{2}i\,Z_n - Z_n\right| = \left|Z_n\right|.\ \left|-1+\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\left|\frac{-2+i}{2}\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{4+1}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}\times 2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}\ (CQFD).$$

b. On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$.

- L_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} &= M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_nM_{n+1} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \cdots + \frac{\sqrt{5}}{2^n} \\ &= \sqrt{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$L_n = 2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

- La limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} L_n = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\sqrt{5}.$$

6. Déterminons une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de n.

$$Mes\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\overrightarrow{OM_n}\right) = arg\left(\frac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) = arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = arg\left(\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right) = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$Mes\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\overrightarrow{OM_n}\right) = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

7. Les valeurs de n pour que O, M_0 et M_n soient alignés :

Première méthode :

O, M_0 et M_n sont alignés signifie que : $\left(\dfrac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ arg\left(\dfrac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) = k'\pi$

$arg\left(\dfrac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) = k'\pi \Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{2} + 2k\pi = k'\pi \Rightarrow n = 2(k'-2k) = 2p$ avec $p = k'-2k$ ou encore si n est pair.

Deuxière méthode :

O, M_0 et M_n sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{2} \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{2} = k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 2k$

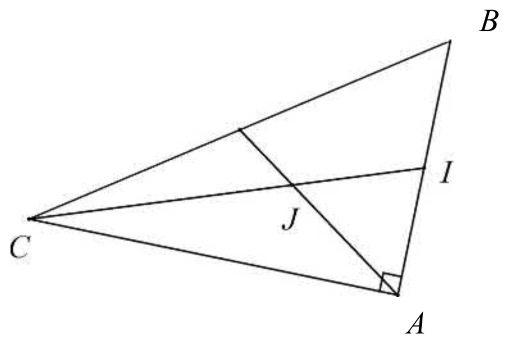
Exercice 2 :

I. Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour $m \in \mathbb{R} - \{-1/3\}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$S_m = \{(A,1)\,;(B\,,m)\,;(C\,,2m)\}$.

Pour tout point M plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.



1. Montrons que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

Premiére méthode :

$G_m = bar\{(A,1)\,;(B\,,m)\,;(C\,,2m)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$.

Pour $m = 1$; $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

I milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1C} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$$ d'où G_1 est le milieu de $[CI]$.

Deuxième méthode :

$G_1 = bar\{(A\,,1)\,;(B\,,1)\,;(C\,,2)\}$ or $I = bar\{(A\,,1)\,;(B\,,1)\}$ donc $G_1 = bar\{(I\,,2)\,;(C\,,2)\}$ donc G_1 est isobarycentre des points I et C donc G_1 est le milieu de $[AB]$

2. Montrons que les points G_1, J et C sont alignés :

Première méthode :

J est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ d'où $J\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A,\, \overrightarrow{AB}\,;\, \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG_1} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $G_1\begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A,\, \overrightarrow{AB}\,;\, \overrightarrow{AC}\right)$

$C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A,\, \overrightarrow{AB}\,;\, \overrightarrow{AC}\right)$

$$det\left(\overrightarrow{G_1J}\,;\overrightarrow{G_1C}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{12} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{24}-\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=0$$

d'où G_1, J et C sont alignés.

Deuxiéme méthode :

G_1, J et C sont alignés , s'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{G_1J}=k\overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{G_1J}=k\overrightarrow{G_1C}$ *etc.*

J est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

G_1 milieu du segment $[CI] \Leftrightarrow \overrightarrow{CG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CG_1}$.

I milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{CI}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CI}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+2\overrightarrow{CI}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+2\left(2\overrightarrow{CG_1}\right)=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CG_1}=3\overrightarrow{CJ} \Rightarrow \overrightarrow{CG_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CJ}.\end{aligned}$$

par suite G_1, J et C sont alignés.

Troisième méthode :

J étant le centre de gravité de ABC alors J appartient à la médiane $[CJ]$ de plus $G_1\in[CI]$ donc les points G_1, J et C sont alignés.

3. Montrons que pour tout point M, $\overrightarrow{V_M}=-\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_M}&=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}.\\ &=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}\\ &=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

4. Montrons que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

Première méthode :

Coordonnés des points G_m dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$:

$$\overrightarrow{G_mA}+m\overrightarrow{G_mB}+2m\overrightarrow{G_mC}=\vec{0}$$

$$(1+3m)\overrightarrow{AG_m}=m\overrightarrow{AB}+2m\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AG_m}=\frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB}+\frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC}\text{ d'où }G_m\left(\frac{m}{1+3m}\,;\frac{2m}{1+3m}\right)$$

Pour $m=-1$, $G_{-1}\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$

$$dét\left(\overrightarrow{AG_m}\,;\overrightarrow{AG_{-1}}\right)=\begin{vmatrix}\frac{m}{1+3m} & \frac{1}{2}\\ \frac{2m}{1+3m} & 1\end{vmatrix}=\frac{m}{1+3m}\times1-\frac{2m}{1+3m}\times\frac{1}{2}=\frac{m}{1+3m}-\frac{m}{1+3m}=0$$

par suite $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

Deuxième méthode :

$G_m = bar\{(A,1);(B,m);(C,2m)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC} = \frac{m}{1+3m}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$$

Pour $m = -1$ on a : $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG_{-1}}$

d'où $\overrightarrow{AG_m} = \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AG_{-1}}$ donc $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

5. Montrons le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle

Première méthode :

Calculons les distances IB , $IG_{-1/2}$, $BG_{-1/2}$ dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$:

$B(1;0)$ et I le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2};0\right)$; $G_{-1/2}(1;2)$:

$$IB = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$IG_{-1/2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$BG_{-1/2} = \sqrt{2^2} = 2$$

D'après le théorème de Pythagore on a : $IB^2 + BG^2_{-1/2} = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = IG^2_{-1/2}$ donc $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en B.

Deuxièmé méthode :

$G_{\frac{-1}{2}} = bar\left\{(A,1);\left(B,-\frac{1}{2}\right);(C,-1)\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-1/2}A} - \frac{1}{2}\overrightarrow{G_{-1/2}B} - \overrightarrow{G_{-1/2}C} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-1/2}A} - \frac{1}{2}\overrightarrow{G_{-1/2}B} + \overrightarrow{CG_{-1/2}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{G_{-1/2}B} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{G_{-1/2}B}$$

Les droites (AC) et $\left(BG_{-\frac{1}{2}}\right)$ sont paralléles.

Puisque les droites (AB) *et* (AC) sont perpendiculaires alors les droites (AB) et $(AG_{-1/2})$ sont perpendiculaires donc le triangle $IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle en B.

II. le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x+3y-2) \end{cases}$$

1. Démontrons que f est une isométrie.

Pemière méthode :

Soit $M(x;y)$, $M'(x';y')$deux points ce plan tel que $f(M) = M'$; $f(O) = O' \Rightarrow O'\left(\frac{4}{5}\,;\,-\frac{2}{5}\right)$.

$$OM = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$O'M' = \sqrt{\left(x' - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y' + \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3x}{5} + \frac{4}{5}y\right)^2 + \left(\frac{4x}{5} + \frac{3}{5}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow O'M' = OM$$

d'où f est une isométrie.

Deuxième méthode :

f étant une application affine, la matrice de l'endomorphisme associée à f est M_φ définie par :

$M_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. M_φ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Vérifions si $détM_\varphi = -1$.

$détM_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{25}{25} = -1$ d'où f est une isométrie.

2. Trouvons l'ensemble des points invariants par f.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 4 = 0 \\ -4x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

l'ensemble des points invariants est la droite d'equation $2x - y - 1 = 0$

3. Caractérisons géométriquement l'application f.

Première méthode :

f étant une isométrie admetant une droite comme ensemble des points invariants alors f est une symétrie orthogonale d'axe (D).

Deuxième méthode :

$f \circ f(M) = M'' \Leftrightarrow f(M') = M''$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{5}(-3x' + 4y' + 4) \\ y'' = \frac{1}{5}(4x' + 3y' - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{5}(-3x + 4y + 4) + \frac{4}{5}(4x + 3y - 2) + 4\right) \\ y'' = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}(-3x + 4y + 4) + \frac{3}{5}(4x + 3y - 2) - 2\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \Rightarrow f \circ f = Id \Rightarrow f$ est une symétrie orthogonale ou une involution.

Problème :

A. *Première Correction* :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

(C) sa courbe représentative.

1. a. Calculons la fonction dérivée de f.

Ensemble de définition $D_f = [0\,;+\infty[$.

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} - 1 = -[1 + (2x+1)e^{-2x}]$.

b. Dressons le tableau de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$

- La limite au borne de $D_f = [0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -1$

- Calculons $f'(0)$: $f'(0) = -\left(1 + (2\times 0 + 1)e^{0}\right) = -2$
- Dérivée $f''(x)$: $f''(x) = -(2 - 4x - 2)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$.
- Signe de $f''(x)$:
  $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $f''(x) \geq 0$ d'où f' est croissante.
  Tableau de variation de f'.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$-2 \nearrow -1$

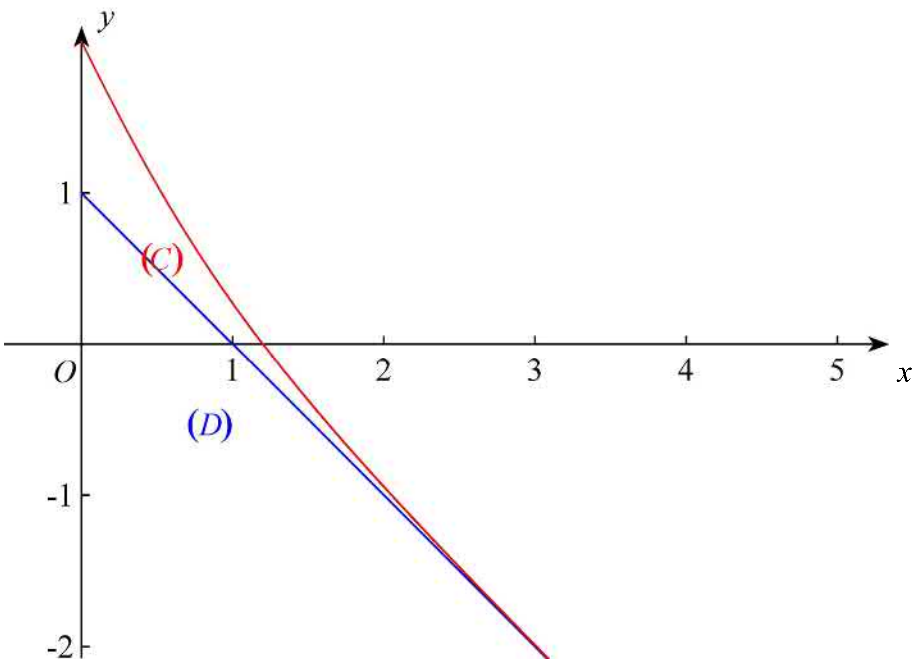
Signe de $f'(x)$.
D'après le tableau de variation de f', pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

c. Dressons le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$

d. Montons que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera.
$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Leftrightarrow f(x) - (1 - x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ on a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (1 - x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^{-2x} + e^{-2x}\right) = 0$ donc la droite d'équation (D) : $y = 1 - x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

e. Construisons (C) et (D)



2. a. Etablissons que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une solution et une seule, notée α.
D'après le tableau de variation de f, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;2]$. Or $0 \in]-\infty\,;2]$ donc il

existe une unique solution $\alpha \in [0\,;+\infty[$ telle que $f(\alpha)=0$.

b. Justifions l'encadrement $1 \leq \alpha \leq 2$:

$f(1)=2e^{-2}>0$ et $f(2)=\dfrac{3-e^4}{e^4}<0$

$f(1)\times f(2)<0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires $1 \leq \alpha \leq 2$.

B. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J=[1\,;+\infty[$ par $g(x)=xe^{-2x}+e^{-2x}+1$.

1. • Etudions les variations de g sur J.

Dérivée g' de g : $g'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}-2e^{-2x}=-(2x+1)e^{-2x}$.

Signe de $g'(x)$.

$\forall x \in J$, $-(2x+1)e^{-2x}<0$ donc g est strictement décroissante.

La limite de g en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-2x}+e^{-2x}+1\right)=1$

Calculons $g(1)$:

$g(1)=1+2e^{-2}$

Tableau de variation de g :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$1+2e^{-2}$ ↘	1

D'aprés le tableau de variation de g pour tout $x \in J$, $g(x)\in[1\,;1+2e^{-2}[\subset J$ d'où $g(x)\in J$.

2. Montrons que pour tout $x \in J$ on a : $|g'(x)| \leq \dfrac{3}{e^2}$.

Première méthode :

Déterminons le sens de variation de g'.

Dérivée seconde de g et son signe :

$g''(x)=4xe^{-2x}>0$ donc pour tout $x\in J$ donc g' est strictement croissante

$x\in J \Leftrightarrow x\geq 1 \Rightarrow g'(x)\geq g'(1)$

$g'(x)\geq -3e^{-2}$

$g'(x)<0$ donc $|g'(x)|\leq|-3e^{-2}| \Leftrightarrow |g'(x)|\leq \dfrac{3}{e^2}$.

Deuxième méthode :

Dressons le tableau de variation de g' :

Dérivée seconde de g et son signe :

$g''(x)=4xe^{-2x}>0$ donc pour tout $x\in J$

La limite de g' : $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=0$ et $g'(1)=-3e^{-2}$

Tableau de variation de g' :

x	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	
$g'(x)$	$-3e^{-2}$ ↗	0

d'après ce tableau de variation, pour tout $x\in J$ on a :

$$-\frac{3}{e^2} \leq g'(x) \leq 0 \leq \frac{3}{e^2} \Rightarrow -\frac{3}{e^2} \leq g'(x) \leq \frac{3}{e^2} \text{ donc } |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}.$$

Déduisons - en que $\forall x \in J$ on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

On sait que $\alpha \in [1\,;2] \subset J$ et $x \in J \Rightarrow x \in [\alpha\,;x]$ et de plus pour tout $x \in J$, $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

En appliquant le théorème des inégalités des accroissement finis à la fonction g sur l'intervalle $[\alpha\,;x]$ on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$

D'autre part $f(x) = g(x) - x$ et $f(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = \alpha$ par suite $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3. Soit $(U_n) \in J$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$.

$U_n \in J$ et $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$ pour tout $x \in J$ donc pour $x = U_n$ on obtient :

$$|g(U_n) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha| \Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$$

b. Déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

D'après la question précédante, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_k - \alpha|$

Varions la valeur de k :

$$|U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_k - \alpha|$$

pour $k = 0$ $\quad \cancel{|U_1 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}|U_0 - \alpha|$

$k = 1$ $\quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|U_1 - \alpha|}$

$k = 2$ $\quad \cancel{|U_3 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}|U_2 - \alpha|$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$k = n-2$ $\quad \cancel{|U_{n-1} - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|U_{n-2} - \alpha|}$

$k = n-1$ $\quad |U_n - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|U_{n-1} - \alpha|}$ (*En multipliant membre à membre et en simplifiant on a*:)

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

On $1 \leq \alpha \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1 \Rightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0 \Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$ donc :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$$

c. Déterminons la limite de U_n.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{e^2}\right)^n = 0 \; donc \; \lim_{x \to +\infty} U_n = \alpha.$$

d. Déterminons un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $\left|U_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$:

Il suffit que $\left(\dfrac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3} \Rightarrow p \geq \dfrac{-3\ln 10}{\ln\dfrac{3}{e^2}} \Rightarrow p \geq 7{,}66$ donc $p = 8$

Calculons U_8 à 10^{-3} prés : $U_8 = 1.200$.

Deuxiéme correction :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 + x$.
(C) sa courbe représentative.

1. a. Calculons la fonction dérivée de f.

Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R} \cap [0\,;+\infty[= [0\,;+\infty[$

$f'(x) = 1 - (2x+1)e^{-2x}$.

b. • Dressons le tableau de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$

La limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - (2x+1)e^{-2x} = 1$.

Calcul de $f'(0)$: $f'(0) = 1 - (2\times 0+1)e^0 = 0$.

Dérivée f''

$f''(x) = 4xe^{-2x}$

Signe de $f''(x)$:

$\forall x \in [0\,;+\infty[$, $4xe^{-2x} \geq 0$ donc $f''(x) \geq 0$.

Tableau de variation de f'.

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	0 $\nearrow$ 1

• Signe de $f'(x)$

D'après le tableau de variation de f', pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ $f'(x) \geq 0$.

c. Dressons le tableau de variation de f.

• La limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons $f(0)$: $f(0) = 2$

• Tableau de variation de f

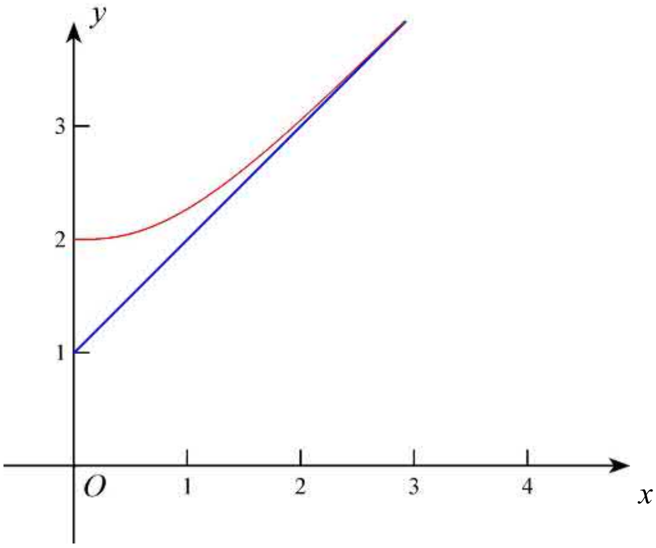
x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	2 $\nearrow$ $+\infty$

d. Montons que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera.

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 + x \Leftrightarrow f(x) - (1+x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (1+x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{-2x} + e^{-2x}\right) = 0$ donc la droite d'équation (D) : $y = 1 + x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

e. Construisons (C) et (D).



2. *a.* Impossible d'établir que $f(x)=0$

Troisième correction :

On a : $f(x)=xe^{-2x}+e^{-2x}-1+x$

1. a. Calculons la fonction dérivée de f.

Ensemble de définition de f : $D_f=\mathbb{R}\cap[0\,;+\infty[=[0\,;+\infty[$

$f'(x)=1-(2x+1)e^{-2x}$.

b. • Dressons le tableau de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$

La limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-(2x+1)e^{-2x}=1$.

Calcul de $f'(0)$: $f'(0)=1-(2\times0+1)e^{0}=0$.

Dérivée f''

$f''(x)=4xe^{-2x}$

Signe de $f''(x)$:

$\forall x\in[0\,;+\infty[$, $4xe^{-2x}\geq 0$ donc $f''(x)\geq 0$. alors f est croissante.

Tableau de variation de f'.

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	0 $\nearrow$ 1

• Signe de $f'(x)$

D'après le tableau de variation de f', pour tout $x\in[0\,;+\infty[$ $f'(x)\geq 0$.

c. Dressons le tableau de variation de f.

• La limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Calculons $f(0)$: $f(0)=0$

• Tableau de variation de f :

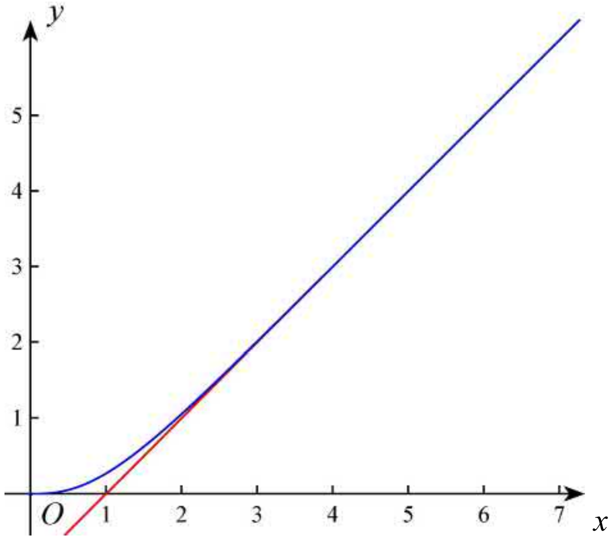
x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

d. Montons que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera.

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} - 1 + x \Leftrightarrow f(x) - (-1+x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-1+x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x}) = 0$ donc la droite d'équation (D) : $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

e. Construisons (C) et (D).



2. a. L'équation $f(x) = 0$ admet 0 comme unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

b. $0 \notin [1 ; 2]$.