Exercice 1 :

1. Ecrivons z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique $z=(1-i)^3\times i^{11}$.

Posons $z_1=(1-i)^3$ et $z_2=i^{11}=-i$

$$\begin{cases}|z_1|=\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}\ \ et\ arg(z_1)=-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}\\ |z_2|=1\ \ et\ arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow|z|=2\sqrt{2}\ \ et$$

$$Arg(z)=-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{5\pi}{4}$$

Sous forme trigonométrique $z=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

Sous forme algébrique
$$\begin{aligned}z&=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]\\&=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]\\&=2\sqrt{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=-2+2i\end{aligned}$$

2. (E): $(z-1+i)(z^2-3iz+4)=0$

a. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$z-1+i=0\Leftrightarrow z=1-i$ ou $z^2-3iz+4=0$ $\Delta=(-3i)^2-4(1)(4)=-25=(5i)^2$

$z_1=\dfrac{3i-5i}{2}=-i$; $z_2=\dfrac{3i+5i}{2}=4i$

$S=\{1-i;\ -i;4i\}$

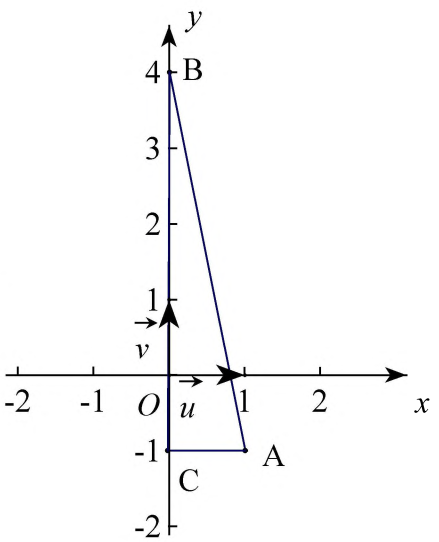
b. L'ecriture sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle des solutions de (E)

$$z=1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z=4i=4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z=-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

c. Construction des images $A(1-i)$; $B(4i)$; $C(-i)$ des solutions de (E)



d. Calculons les distances AB; AC; et BC puis déduisons la nature du triangle ABC

$AB=|z_B-z_A|=|5i-1|=\sqrt{26}$

$AC=|z_C-z_A|=|-1|=1\quad BC=|z_C-z_B|=|5i|=5$

$AB^2=26$

$AC^2+BC^2=1+25=26=AB^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

Exercice 2 :

A. Le taux d'accroissement naturel est de 3,2% depuis 1990. La population etait de 1200 000 en 2000.

a. Soit P_0 la population en 1990 et P_n la population en $1990+n$

$P_{n+1} = (1+0{,}032)P_n = (1{,}032)P_n$ donc (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}032$

$P_n = q^{n-k}P_k$

La population à prévoir en 2015 est: $(1{,}032)^{25-10} 1\,200\,000 = 1\,200\,000(1{,}032)^{15}$
$=1\,924\,760{,}54$

La population serait d'environ 1 924 761

b. Déterminons la population en 1990

$$P_0(1{,}032)^{10} = 1\,200\,000 \Longrightarrow P_0 = \frac{1\,200\,000}{(1{,}032)^{10}} = 875\,758{,}32$$

La population était d'environ 875 758

B. Une entreprise fabrique entre 60 et 200 cafétière par jour. Le coùt de production est $C_m(q) = 0{,}015q^2 - 1{,}78q + 137$

1. Sachant que les coùt fixes s'élèvent à 2000, montrons que: $C(q) = 0{,}005q^3 - 0{,}89q^2 + 137q + 2000,\ q \in [60\,;200]$

$C(q) = \int C_m(q)dq = 0{,}005q^3 - 0{,}89q^2 + 137q + k$

$C(0) = 2000 \Leftrightarrow k = 2000$ d'où $C(q) = 0{,}005q^3 - 0{,}89q^2 + 137q + 2000$

Autre méthode

$C'(q) = 0{,}015q^2 - 1{,}78q + 137 = C_m(q)$ alors $C(q) = 0{,}005q^3 - 0{,}89q^2 + 137q + 2000$

2. Le coùt total de fabrication de 150 cafétières

$C(150) = 0{,}005(150)^3 - 0{,}89(150)^2 + 137(150) + 2000 = 19\,400$

PROBLÈME :

Le bénéfice est $B(x) = -5000x + 75000(\ln x)$ où x est le nombre de matériel informatioque compris entre 1 et 60 et le bénéfice est exprimé en F CFA.

1. Calculons B(3) et B(5)

$B(3) = -5000(3) + 75000(\ln 3) = 67\,395{,}92\ F\,CFA$

$B(5) = -5000(5) + 75000(\ln 5) = 95\,707{,}84\ F\,CFA$

2. Calculons B'(x)

$$B'(x) = -5000 + \frac{75000}{x}$$

3. Dressons le tableau de variation de B

$$B'(x) = 0 \Leftrightarrow -5000 + \frac{75000}{x} = 0 \Longrightarrow x = 15$$

q	1		15		60
$B'(q)$		+	0	−	
$B(q)$	−5000	↗	128103,77	↘	7075,84

4. Complétons le tableau suivant:

q	1	10	20	30	40	50	60
$B(q)$	−5000	122 693,88	124 679,92	105 089,8	76 665,96	43 401,73	7075,84

5. Traçons la courbe de B dans un répère orthogonal