Exercice 1

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

1. a. Calculons $P(-2)$

$P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0$

b. Comparons $P(x)$ à $(x+3)(x-2)(x+2)$

$(x+3)(x-2)(x+2) = (x+3)(x^2-4) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = P(x)$

c. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.

$S = \{-3;\ -2; 2\}$

2. Utilisons $1°)$ pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:

a. $(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4(\ln x) - 12 = 0$

L'ensemble de validité : $D_V =]0; +\infty[$

En posant $X = \ln x$ on a $X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0$ qui admet comme solution : $X = -3$; $X = -2$ et $X = 2$

Pour $X = -3 \Rightarrow \ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

Pour $X = -2 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

Pour $X = 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow S = \{e^{-3}; e^{-2}; e^2\}$

b. $e^{3x} + 3e^{2x} - 4e^x - 12 = 0$

En posant $X = e^x$, $X \in \mathbb{R}_+^*$;on a $X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0$ qui admet comme solution:

$X = -3 \notin \mathbb{R}_+^*$; $X = -2 \notin \mathbb{R}_+^*$ et $X = 2 \in \mathbb{R}_+^*$

on a: $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$S = \{\ \ln 2\ \}$.

Exercice 2

1. Calculons la fonction dérivée des fonctions suivantes

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$g(x) = x - \dfrac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

$h(x) = 3 + x\ln x \Rightarrow h'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} \Rightarrow h'(x) = \ln x + 1$

$k(x) = e^{3x} - 5x + 3 \Rightarrow k'(x) = 3e^{3x} - 5$

2. Déterminons une primitive de chacune des fonctions suivantes

Soit F une primitive de f sur Df

a. $f(x) = x^2 + \dfrac{2x}{x^2+3} \Leftrightarrow F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \ln(x^2+3)$

b. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow F(x) = x^3 + x^2 - x$

c. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}x \Leftrightarrow F(x) = \dfrac{1}{20}x^4 - \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{1}{8}x^2$

d. $f(x) = e^x - x^2 + 3 \Leftrightarrow F(x) = e^x - \dfrac{1}{3}x^3 + 3x$

PROBLÈME

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1}$

1. Déterminons le domaine de définition

$Df = \{x/x \in \mathbb{R};\, x+1 \neq 0\}$

Posons $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$ d'où $Df = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$

2. Les limites de f aux bornes de Df

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Etudions le signe de $x+1$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $+\infty$
$x+1$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-(-1)-1}{-1+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-(-1)-1}{-1+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3. Montrons qu'il existe a; b; c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

***Première méthode*:**

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

Par identification $f(x) = f(x)$

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-1 \\ b+c=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$f(x) = x-2+\frac{1}{x+1}$$

Deuxième méthode :

	1	-1	-1
-1		-1	2
	1	-2	1

Ainsi on a : $a=1;\ b=-2;\ c=1$

***Troisième méthode*:**

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-1 & \ x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & \\ \hline -2x-1 & = x-2 \\ 2x+2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Ainsi on a : $a=1;\ b=-2;\ c=1 \ \Longrightarrow\ f(x) = x-2+\dfrac{1}{x+1}$

4. Montrons que la droite (D): $y = x-2$ est asymptôte à la courbe de f

(D) est asymptôte à (C) ssi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-y] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty} (x-2)+\frac{1}{x+1}-(x-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

donc $(D): y = x - 2$ est asymptôte à (C).

5. Calculons la dérivée f' de f

Première forme : pour $\boldsymbol{f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Deuxmière forme : pour $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x - 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Signe de la dérivée

Pour tout $x \in D_f$ $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que : $x(x+2)$.

Signe de $x(x+2)$

Posons $x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

6. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		-1			0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

7. Construisons (Cf) dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}\ ; \vec{j})$