EXERCICE 1

1. Déterminons l'année à laquelle l'âge de la mère sera égal à la somme des âges de ses trois enfants

Soit x le nombre d'années qui doit s'écouler.

$$(8+x)+(10+x)+(13+x)=(37+x) \Rightarrow 31+3x=37+x$$

$$\Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

$$x=3\text{ans}$$

Déterminons les âges respectifs

$(8+3)$; $(10+3)$; $(13+3)$ soit 11 ans ; 13 ans 16 ans

$2^{ème}$ Méthode :

Dans Trois ans car

La mère a 37 ans

La somme des âges de ses enfants $= 8+10+13 = 31$ ans

$1^{ère}$ année la mère = 38 ans et ses enfants $= 9+11+14 = 34$ ans

$2^{é}$ année la mère = 39 ans et ses enfants $= 10+12+15 = 37$ ans

$3^{é}$ année la mère = 40 ans et ses enfants $= 11+13+16 = 40$ ans

2. **a.** Les valeurs nominales sont :

Soit $(V_1 ; V_2 ; V_3)$ proportionnel à $(4; 8; 6)$ et $V_1 + V_2 + V_3 = 540\,000$

$$\frac{V_1}{4}=\frac{V_2}{8}=\frac{V_3}{6}=\frac{540\,000}{18}=30\,000$$

$V_1 = 30\,000 \times 4 \Rightarrow V_1 = 120\,000$

$V_2 = 30\,000 \times 8 \Rightarrow V_2 = 240\,000$

$V_3 = 30\,000 \times 6 \Rightarrow V_3 = 180\,000$

b. Le taux d'escompte est :

$$V_a = V - e \quad \text{avec } e=\frac{V\times t\times n}{36000}$$

$$V_{at} = V_{a1}+V_{a2}+V_{a3} \Leftrightarrow V_{at} = (V_1-e_1)+(V_2-e_2)+(V_3-e_3)$$

$$e_1=\frac{V_1\times t\times n_1}{36000}=\frac{120\,000\times t\times 45}{36000}=150t$$

$$e_2=\frac{V_2\times t\times n_2}{36000}=\frac{240\,000\times t\times 30}{36000}=200t$$

$$e_1=\frac{V_1\times t\times n_1}{36000}=\frac{180\,000\times t\times 60}{36000}=300t$$

$$V_{at} = (V_1-e_1)+(V_2-e_2)+(V_3-e_3)$$

$$\Leftrightarrow 53\,5710 = (120\,000-150t)+(240\,000-200t)+(180\,000-300t)$$

$$\Leftrightarrow 53\,5710 = 540\,000 - 650t$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{4290}{650}=6{,}6$$

$$t=6{,}6\%$$

3. Déterminons la date d'échéance de l'effet:

$\mathrm{V}_1 = 14320$; $n_1 = ?$; $V_2 = 14200$; $n_2 = 20$ *jours* ; $t = 10\%$

$$D=\frac{36000}{10}=3600$$

$$V_1(D-n_1)=V_2(D-n_2) \Leftrightarrow 14200\,(3600-n_1)=14200(3600-20)$$
$$\Leftrightarrow 51552000-14320n_1=50836000$$
$$\Leftrightarrow n_1=\frac{716000}{14320}=50\ jours$$

C'est - à - dire la date d'échéance est le 30 décembre.

EXERCICE 2

1. Montrons que pour tout entier n ; $u_{n+1}=1{,}05u_n-10$ $\quad u_0=600$;

$$u_1=u_0+5\%u_0-10 \Longrightarrow u_1=u_0\,(1+0{,}05)-10=1{,}05\,u_0-10$$
$$u_2=u_1+5\%u_1-10 \Longrightarrow u_2=u_1\,(1+0{,}05)-10=1{,}05\,u_1-10$$
$$u_3=u_2+5\%u_2-10 \Longrightarrow u_3=u_2\,(1+0{,}05)-10=1{,}05\,u_2-10$$
$$\vdots$$
$$u_{n+1}=u_n+5\%u_n-10 \Longrightarrow u_{n+1}=u_n(1+0{,}05)-10=1{,}05u_n-10$$

d'où $u_{n+1}=1{,}05u_n-10$

2. On pose $V_n=u_n-200$

   a. Montrons que la suite est géométrique , donnons sa raison et son 1^{er} terme V_0

   $$V_{n+1}=u_{n+1}-200 \Longrightarrow V_{n+1}=1{,}05u_n-10-200 \Longrightarrow V_{n+1}=1{,}05u_n-210$$
   $$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{1{,}05u_n-210}{u_n-200}=\frac{1{,}05(u_n-200)}{u_n-200}=1{,}05$$

   C'est une suite géométrique de 1^{er} terme $V_0=400$ et de raison $q=1{,}05$.

   b. Exprimons V_n et u_n en fonction de n

   $V_n=400\,(1{,}05)^n$, n entier donc $u_n=400\,(1{,}05)^n+200$

   c. Le nombre de calculatrice que l'entreprise vend en 2025 est :

   $n=2025-2015=10$

   $U_{10}=V_0\,(1{,}05)^{10}+200 \Leftrightarrow U_{10}=400\,(1{,}05)^{10}+200=851{,}5578$

   $\Rightarrow U_{10}=851558$ calculatrices

Problème: $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$

1. Déterminons le domaine de définition Df de f

   $Df=\{x/x\in\mathbb{R}, x-2\neq 0\}$

   $Df=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]\,2;+\infty[$

2. Déterminons trois (3) nombres a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

   Par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x & x-2 \\ \cline{2-2} -2x^2+4x & =2x+1 \\ \hline x & \\ -x+2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

D'où : $a=2$; $b=1$; $c=2$ et $f(x)=2x+1+\dfrac{2}{x-2}$

Méthode par identification

Pour $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ avec a, b, c des réels

On a : $f(x)=\dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$

Par identification $\begin{cases} a & = & 2 \\ -2a+b & = & -3 \\ -2b+c & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = & 2 \\ b & = & 1 \\ c & = & 2 \end{cases}$

D'où $f(x)=2x+1+\dfrac{2}{x-2}$

3. Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition Df :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}2x+1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}2x+1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

Déduisons les équations des asymptotes

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(2x+1)=0$ donc la droite d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique

4. Calculons $f'(x)$ de f

- A partir de $f(x)=2x+1+\dfrac{2}{x-2}$

$f'(x)=2-\dfrac{2}{(x-2)^2}=\dfrac{2[(x-2)-1][(x-2)+1]}{(x-2)^2}=\dfrac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$ ou $f'(x)=\dfrac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$

- A partir l'expression $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$

$f'(x)=\dfrac{(4x-3)(x-2)-(2x^2-3x)}{(x-2)^2}=\dfrac{4x^2-11x+6-2x^2+3x}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$

Etudions le signe de $f'(x)$ de f et endéduisons le sens de variations
le signe de $f'(x)$ est de celui de $2(x-3)(x-1)$ donc on a :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc pour $x\in]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$, $f'(x)\geq0\Rightarrow f$ est croissante.
Pour $x\in[1;2[\cup]2;3]$, $f'(x)\leq0\Rightarrow f$ est décroisante
Le tableau de variation :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	9	↗	$+\infty$

NB: le tableau de variations n'est pas obligatoire pour préciser le sens de variations

5. Construisons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, I; J)$ avec $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.

6. Calculons l'aire en cm^2 de la portion du plan comprise entre la courbe f l'asymptote oblique et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 6$

$$A = \int_4^6 [f(x) - y\,]\,dx \times (\,1\text{cm} \times 2\text{cm}\,)$$

$$= \int_4^6 \frac{2}{x-2}\,dx \times (\,1\text{cm} \times 2\text{cm}\,) = \left[2 \times 2 \times \ln|x-2|\,\right]_4^6$$

$$= 4\ln 2 \text{ cm}^2 \simeq 2{,}7725 \text{ cm}^2$$