

EXERCICE 1 :

I. $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1. Vérifions que $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.

Developper l'expression : $(z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

Première méthode : Tableau d'HORNER:

	1	-2√3 - 2i	4 + i4√3	-8i
2i		2i	-4i√3	8i
	1	-2√3	4	0

Alors $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.

Deuxième méthode : Par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i & z - 2i \\
 \underline{-z^3 + 2iz^2} & \\
 -2\sqrt{3}z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z & \\
 \underline{2\sqrt{3}z^2 - 4i\sqrt{3}z} & \\
 4z - 8i & \\
 \underline{-4z + 8i} & \\
 0 & \\
 \end{array}$$

Alors $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.

2. Résolvons dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation $f(z) = 0$:

$$(z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0 \text{ ou } z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

$$z - 2i = 0 \Rightarrow z = 2i$$

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 4 = -1 = i^2$$

$$z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} + i; \quad S = \{2i, \sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i\}$$

3. Une écriture trigonométrique de chacune des solutions:

Pour $z_0 = 2i$

$$|z_0| = 2; \arg(z_0) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

Pour $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2; \arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}, \text{ donc } z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Pour $z_2 = \sqrt{3} + i$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \arg(z_2) = \frac{\pi}{6} \text{ donc } z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

II. La nature et les éléments caractéristiques des transformations

On rappelle que toute similitude directe a pour écriture complexe $Z' = aZ + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ dont les éléments caractéristiques sont: rapport $k = |a|$, d'angle un argument de a et de centre d'affixe

$\frac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$

1. $Z' = Z + 1 - 2i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $1 - 2i$
2. $Z' = iZ + 1$ est l'écriture complexe de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$
3. $Z' = 3Z - 1 + i$ est l'écriture complexe de l'homothétie de rapport : $k = 3$, de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1-i}{2}$.
4. $Z' = (1+i)Z - 1 + i$ est l'écriture complexe de la similitude directe de rapport $k = |1+i| = \sqrt{2}$, d'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{-1+i}{-i} = -1 - i$.

EXERCICE 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1. Calcul de u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{0+3}{0+4} = \frac{3}{4} ; u_2 = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + 3}{\left(\frac{3}{4}\right) + 4} = \frac{18}{19}$$

2. a. Montrons que pour tout entier naturel non nul n , $0 < u_n < 1$.

On a: $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}$.

Procédons par le raisonnement par récurrence:

pour $n = 1$, $u_1 = \frac{3}{4}$ donc $0 < u_1 < 1$ (vrai)

Supposons pour n non nul fixé, $0 < u_n < 1$ et montrons que pour tout entier n non nul : $0 < u_{n+1} < 1$

On a: $0 < u_n < 1$

$$4 < u_n + 4 < 5$$

$$\frac{5}{5} < \frac{5}{u_n + 4} < \frac{5}{4}$$

$$2 - \frac{5}{4} < 2 - \frac{5}{u_n + 4} < 1$$

$$\frac{3}{4} < u_{n+1} < 1 \implies 0 < u_{n+1} < 1 .$$

Ainsi pour tout entier naturel non nul n , $0 < u_n < 1$.

- b. Montrons que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \frac{2u_n + 3 - (u_n)^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-(u_n)^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(u_n + 3)}{u_n + 4} > 0$$

car chacun des facteurs est positif. D'où la suite (u_n) est croissante.

- c. La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

Autres méthodes: étude de la fonction $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ sur l'intervalle $[0,1]$

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

- a. Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{1}{5} \frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5} v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{1}{3}$.

b. u_n en fonction de n .

On a: $v_n = \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ pour tout n entier naturel

$$v_n = 1 - \frac{4}{u_n+3} \Rightarrow v_n - 1 = -\frac{4}{u_n+3}$$

$$u_n + 3 = -\frac{4}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = -\frac{4}{v_n - 1} - 3$$

$$u_n = -\frac{4}{\frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 1} - 3$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) converge vers 1.

PROBLEME :

$$f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$$

1. Calculons $f'(t)$.

$$f'(t) = 24 \ln(t) + 24 - 6t.$$

2. a. Etudions le signe de $f''(t)$ sur $[1;26]$

$$f''(t) = \frac{24}{t} - 6 = \frac{24-6t}{t}$$

Tableau de signe

t	1	4	26
$24-6t$	+	0	-

Sur $[1;4]$ $f''(t) \geq 0$ et sur $[4;26]$ $f''(t) \leq 0$.

b. Dressons le tableau de variations de f'

t	1	4	26
$f''(t)$	+	0	-
$f'(t)$	18	$48 \ln 2$	$24 \ln(26) - 132$

$$f'(1) = 18, f'(4) \cong 33,27 \text{ et } f'(26) \cong -53,80.$$

c. Montrons que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1;26]$.

f' est continue et strictement croissante (bijective) de $[1;4]$ sur $[18; 33,27]$ et $0 \notin [18; 33,7]$ donc l'équation $f'(t) = 0$ n'admet pas de solution sur $[1; 4]$.

f' est continue et strictement décroissante (bijective) de $[4; 26]$ sur $[-53,80; 33,27]$ et

$0 \in [-53,80; 33,27]$ donc l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1; 26]$.

$f'(14) = 3,33$ et $f'(15) = -1,006$ donc $14 < \alpha < 15$.

d. Le signe de $f'(t)$ sur $[1; 26]$

Pour tout t de $[1; \alpha]$ $f'(t) \geq 0$ et pour tout t de $[\alpha; 26]$ $f'(t) \leq 0$.

Dressons le tableau de variations de f

t	1	α	26
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	7	$f(\alpha)$	15,05

$f(1) = 7$ (soit 7000 malades), $f(26) \cong 15,05$ (soit 15050 malades)

3. a. Une interprétation du tableau de variation de la fonction f' .

- De la première à la quatrième semaine la vitesse de la propagation de l'épidémie augmente.
- De la quatrième à la 26^{ème} semaine la vitesse de la propagation de l'épidémie diminue

b. Le nombre de malades commence à diminuer à partir de la 14^{ème} semaine écoulée.