EXERCICE 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. (Unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$

Partie A :

1. Montrons que $-i$ est solution de (E).

$-i$ solution de $(E) \Leftrightarrow (-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = 0$

$(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = i - (-8+i) - 17i - 8 + 17i = i + 8 - i - 8 = 0.$

donc $(-i)$ est une solution de (E).

2. Déterminons les nombres réels a, b, c tels que $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2+bz+c)$.

Première méthode* : *Division euclidienne

$-i$ solution de $(E) \Leftrightarrow \left(z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i\right)$ est divisible par $(z+i)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & +(-8+i)z^2 & +(17-8i)z & +17i & z+i \\
\hline
-z^3 & -iz^2 & & & = z^2 - 8z + 17 \\
\hline
 & -8z^2 & +(17+i)z & & \\
 & 8z^2 & +8iz & & \\
\hline
 & & 17z & +17i & \\
 & & -17z & -17i & \\
\hline
 & & 0 & +0 &
\end{array}
$$

donc $a = 1$, $b = -8$, $c = 17$ et $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

Deuxième méthode* : *Coefficients indéterminés

$(z+i)(az^2+bz+c) = az^2(z+i) + bz(z+i) + c(z+i) = az^3 + (ia+b)z^2 + (ib+c)z + ic$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ ia + b = -8 + i \\ ib + c = 17 - 8i \\ ic = 17i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 17 \\ c = 17 \end{cases}$$

d'où $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

Troisième méthode* : *Tableau d'Hörner.

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$-i$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

donc $a = 1$, $b = -8$, $c = 17$ et $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

3. Résolvons l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Posons : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$

$\Leftrightarrow z + i = 0$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0$

Résolution de : $z^2 - 8z + 17 = 0$

$\Delta' = 16 - 17 = -1 = i^2$

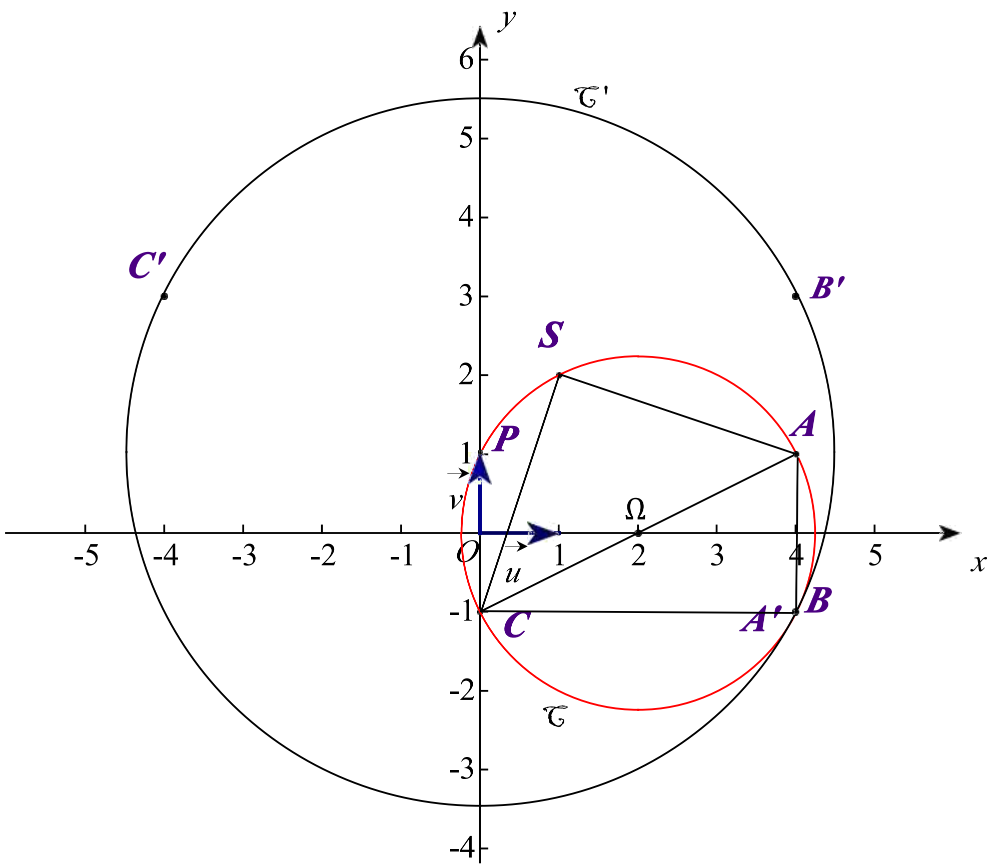
$z_1 = 4 - i$ et $z_2 = 4 + i$

$$S=\{-i\,;\,4-i\,;\,4+\}$$

Partie B :

Soient les points : $A\longmapsto z_A=4+i$, $B\longmapsto z_B=4-i$; $C\longmapsto z_C=-i$.

1. Plaçons les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice :



2. $r:\mathscr{P}\longrightarrow\mathscr{P}$

$M\longmapsto M'$ tel que $z'=iz-2i+2$ où $M\longmapsto z$ et $M'\longmapsto z'$ le point $\Omega\longmapsto z_\Omega=2$.

$S=r(A)$.

Calculons l'affixe s de S.

$s=iz_A-2i+2=i(4+i)-2i+2=2i+1$

$s=1+2i$

3. Démontrons que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et rayon.

Première méthode :

par conjecture à partir de la représentation graphique, Ω semble être le centre de ce cercle. On cherche une preuve en comparant (par calcul) les distances ΩB; ΩA, ΩS et ΩC :

$\Omega B=\left|z_B-z_\Omega\right|=\left|4-i-2\right|=\left|2-i\right|=\sqrt{5}$

$\Omega A=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|4+i-2\right|=\left|2+i\right|=\sqrt{5}$

$\Omega S=\left|z_S-z_\Omega\right|=\left|1+2i-2\right|=\left|-1+2i\right|=\sqrt{5}$

$\Omega C=\left|z_C-z_\Omega\right|=\left|-i-2\right|=\sqrt{5}$

Donc B, A, S, C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$

Deuxième méthode :

D'après la formule des points cocycliques, on vérifie : $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\div\dfrac{z_A-z_S}{z_C-z_S}\in\mathbb{R}^*$.

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \div \frac{z_A - z_S}{z_C - z_S} = \left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)\left(\frac{z_C - z_S}{z_A - z_S}\right) = \left(\frac{-i-4+i}{4+i-4+i}\right)\left(\frac{-i-1-2i}{4+i-i-2i}\right) = \frac{-2}{i} \times \frac{-1-3i}{3-i}$$

$$= 2i \times \frac{-i(3-i)}{3-i} = 2 \in \mathbb{R}^*.$$ Donc B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$.

Déterminons le centre et rayon de $\mathcal{C}$.

Première méthode **:**

Soit I le centre d'affixe $z = x + iy$ $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

$IA = IB = IC = IS =$ rayon.

$IA^2 = \left|z_A - z_B\right|^2 = \left|4 + i - x - iy\right|^2 = \left|(4-x) + i(1-y)\right|^2 = (4-x)^2 + (1-y)^2$

$IB^2 = \left|z_B - z_I\right|^2 = \left|4 - i - x - iy\right|^2 = (4-x)^2 + (1+y)^2$

$IC^2 = \left|z_C - z_I\right|^2 = \left|-i - x - iy\right|^2 = x^2 + (1+y)^2$

$IS^2 = \left|z_S - z_I\right|^2 = \left|1 + 2i - x - iy\right|^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2$

Par égalités : on a

$$\begin{aligned}
IC^2 = IB^2 \Leftrightarrow x^2 + (1+y)^2 = (4-x)^2 + (1+y)^2 \Leftrightarrow x^2 = (4-x)^2 &\Leftrightarrow x^2 - (4-x)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (x-4+x)(x+4-x) = 0\\
&\Leftrightarrow 4(2x-4) = 0\\
&\Leftrightarrow 2x - 4 = 0\\
&\Longrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IS^2 = IB^2 \Leftrightarrow (4-x)^2 + (1+y)^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2 &\Leftrightarrow (4-2)^2 + (1+y)^2 = (1-2)^2 + (2-y)^2\\
&\Leftrightarrow 2^2 + (1+y)^2 = (-1)^2 + (2-y)^2\\
&\Leftrightarrow 4 + 1 + 2y + y^2 = 1 + 4 - 4y + y^2\\
&\Leftrightarrow 6y = 0 \Longrightarrow y = 0
\end{aligned}$$

d'où $z_I = 2$.

Le rayon de ce cercle est :

$IC = \left|z_C - z_I\right| = \left|-i - 2\right| = \sqrt{5}$ donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I = \Omega$ de rayon $\sqrt{5}$.

Deuxième méthode **:**

On vérifie que l'angle $\widehat{CBA}$ est droit et on en déduit que $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. Puis on détermine l'affixe du milieu I (coincide avec Ω) $[AC]$ et le rayon IA.

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}}\right) = Arg\left(\widehat{CBA}\right) = Arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = Arg\left(\frac{-i-4+i}{4+i-4+i}\right) = Arg\left(\frac{-4}{2i}\right) = Arg(2i) = \frac{\pi}{2},$$

CBA est un triangle rectangle en B *et* I d'affixe $Z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{4 + i - i}{2} = 2 = z_\Omega$ donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC par suite $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\Omega A = \sqrt{5}$

4. Á tout point $M \longmapsto z$ on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$

   a. Déterminons l'affixe des points A', B', C' associe respectivement aux points. A, B, C.

$$z_{A'} = \frac{iz_A + 10 - 2i}{z_A - 2} = \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{4 + i - 2} = \frac{2i + 9}{2 + i} = \frac{1}{5}(9 + 2i)(2 - i) = \frac{1}{5}(18 + 2 + (4 - 9)i) = 4 - i$$

$$z_{B'} = \frac{iz_B + 10 - 2i}{z_B - 2} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4 - i - 2} = \frac{11 - 2i}{2 - i} = \frac{1}{5}(11 - 21)(2 + 1) = \frac{1}{5}(22 - 2 - (11 + 4)i) =$$

$$= 4 + 3i$$

$$z_{C'} = \frac{iz_C + 10 - 2i}{z_C - 2} = \frac{i(-i) + 10 - 2i}{-i - 2} = \frac{11 - 2i}{-2 - i} = \frac{1}{5}(11 - 2i)(-2 + i) = \frac{1}{5}(-22 + 2 + (11 + 4)i)$$

$= -4+3i$

b. Vérifions que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P d'affixe i.

$A', B', C' \in \mathcal{C}'$ signifie que $PA' = PB' = PC' = Rayon$

$PA' = |z_{A'} - z_P| = |4-i-i| = |4-2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$.

$PB' = |z_{B'} - z_P| = |4+3i-i| = |4+2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$.

$PC' = |z_{C'} - z_P| = |-4+3i-i| = |-4+2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre P et de rayon $r = 2\sqrt{5}$.

c. Pour tout nombre $z \neq 2$ exprimons $|z'-i|$ en fonctionde z.

$$|z'-i| = \left|\frac{iz+10-2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right| = \left|\frac{10}{z-2}\right| = \frac{10}{|z-2|}.$$

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$.

Démontrons que $|z'-i| = 2\sqrt{5}$

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{5} \text{ donc } |z'-i| = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \ (CQFD)$$

e. Déduisons à quel ensemble appartiennent les points M' assocés aux points M du cercle $\mathcal{C}$.

$|z'-i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow M'$ appartiennent au cercle de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$.

Exercixe 2 :

I. On considère l'équation $(E): 8x+5y=1$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. *a.* Donnons une solution particulière de l'équation (E)

Première méthode : par essai

On constate que : $8(2)+5(-3) = 16-15 = 1$ le couple $(2\,;\,-3) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution particulière de l'équation de l'équation (E).

Deuxième méthode **:** Algorithme d'Euclide.

q	1	1	1	1
8	5	3	2	1
r	3	2	1	0

$1 = 3 - 2 \times 1$

$2 = 5 - 3 \times 1$

$3 = 8 - 5 \times 1$

$3-2=1 \Leftrightarrow 3-(5-3)=1 \Leftrightarrow 2(3)-5=1 \Leftrightarrow 2(8-5)-5=1 \Leftrightarrow 8(2)+5(-3)=1$ donc $(2\,;\,-3)$ est une solution particulière.

Troisième méthode : Par congruence.

$$\begin{aligned}
8x+5y=1 \Leftrightarrow 8x=-5y+1 &\Leftrightarrow 8x \equiv 1[5]\\
&\Leftrightarrow 3x \equiv 1[5]\\
&\Leftrightarrow 6x \equiv 2[5]\\
&\Leftrightarrow x \equiv 2[5]\\
&\Rightarrow x = 5k+2 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

pour $k=0$ on a : $x=2$ et $-5y = 8(2)-1 \Leftrightarrow -5y=15 \Rightarrow y=-3$ donc $(2\,;-3)$ est une solution particulière.

b. Résolvons l'équation (E)

Première méthode **:**

Comme $(2\,;\,-3)$ est une solution particulière, on a le système.

$$\begin{cases} 8x+5y=1 \\ 8(2)+5(-3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+5y=1 \\ 8(-2)+5(3)=-1 \end{cases}$$

$$\overline{8(x-2)+5(y+3)=0}$$

$$\Leftrightarrow 8(x-2)=5(-y-3)$$

$8 \wedge 5 = 1$ alors $5/(x-2)$ et $8/(-y-3)$ par suite

$$x=5k+2 \text{ et } y=-8k-3 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

vérification: $8(5k+2)+5(-8k-3)=40k+16-40k-15=1$

donc l'ensemble des solutions est $S=\{(5k+2\ ;\ -8k-3),\ k\in\mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode **:**

$$8x+5y=1 \Leftrightarrow 8x=-5y+1 \Leftrightarrow 8x\equiv 1[5]$$

$$\Leftrightarrow 3x\equiv 1[5]$$

$$\Leftrightarrow 6x\equiv 2[5]$$

$$\Leftrightarrow x\equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow x=5k+2,\ k\in\mathbb{Z}$$

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$8(5k+2)+5y=1 \Leftrightarrow 40k+16+5y=1 \Leftrightarrow 5y=-40k-15 \Rightarrow y=-8k-3$

On endeduit que l'ensemble des solutions est $S=\{(5k+2\ ;\ -8k-3),\ k\in\mathbb{Z}\}$

2. Soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$.

a. Montrons que le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de (E).

Premiière méthode **:**

On sait que :

$N=N \Leftrightarrow 8a+1=5b+2 \Leftrightarrow 8a-5b=2-1 \Leftrightarrow 8a+5(-b)=1 \Rightarrow (a\ ;\ -b)$ est une solution de (E).

Deuxième méthode **:**

$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}.$$

$$N=8a+1 \Rightarrow a=\frac{N-1}{8}$$

$$N=5b+2 \Rightarrow b=\frac{N-2}{5} \Rightarrow -b=-\frac{N-2}{5}$$

Vérifions si $(a\ ;-b)$ est solution de (E).

$8\left(\frac{N-1}{8}\right)+5\left(-\frac{N-2}{5}\right)=N-1-N+2=1$ d'où $(a\ ;-b)$ est solution de (E).

b. Le reste de la division euclidienne de N par 40.

D'après la relation qui vérifie N, on a : $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$.

D'après 2) a), $(a\ ;\ -b)$ solution de (E), par suite $\begin{cases} a=5k+2 \\ -b=-8k-3 \end{cases},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5k+2 \\ b=8k+3 \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$

En remplaçant a ou b par leur valeur, on a :

$N=8(5k+2)+1=40k+17,\ k\in\mathbb{Z}$

ou $N=5(8k+3)+2=40k+17$ d'où $N=40k+17,\ k\in\mathbb{Z}$

$N=40k+17,\ k\in\mathbb{Z}$ d'où le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3. **a.** Résolvons l'équation $8x+5y=100$ où $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

$8\wedge5=1$ et $1/100$, donc l'équation admet au moins une solution.

Premier méthode **:** Par congruence :

$8x+5y=100 \Leftrightarrow 5y=100-8x \Leftrightarrow 5y\equiv100[8] \Leftrightarrow y\equiv20[8] \Leftrightarrow y\equiv4[8] \Longrightarrow y=8k+4,\ k\in\mathbb{Z}$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation :

$8x+5(8k+4)=100 \Leftrightarrow 8x=-40k+80 \Longrightarrow x=-5k+10.$

$S=\{(-5k+10\,;\,8k+4),\ k\in\mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode **:** Par application du théorème de Bézout.

D'après 1°) on a :

$8(2)+5(-3)=1 \Leftrightarrow 8(200)+5(-300)=100$ donc le couple $(200\,;\,-300)$ est une solution particulière de l'équation $8x+5y=100$.

$$\begin{cases}8x+5y=100\\ \\ 8(200)+5(-300)=100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+5y=100\\ \\ 8(-200)+5(300)=-100\end{cases}$$

$$\overline{8(x-200)+5(y+300)=0}$$

$$\Leftrightarrow 8(x-200)=5(-y-300)$$

$8\wedge5=1$ alors on a $5/(x-200)$ et $8/(-y-300)$ par suite :

$5/(x-200)$ et $8/(-y-300) \Longrightarrow x=5k+200$ et $y=-8k-300$

Vérification : $8(5k+200)+5(-8k-300)=40k+1600-40k+1500=100$ donc :

$S=\{(5k+200\,;\,-8k-300),\ k\in\mathbb{Z}\}.$

b. Soient α le nombre d'hommes et β le nombre de femmes :

D'après l'énoncé, on a : $8\alpha+5\beta=100$

Avec la question précédente :

Avec la première méthode on a: $\alpha=-5k+10$ et $\beta=8k+4$

pour $k=0$ ou $k=1$: $(\alpha=10$ et $\beta=4)$ *ou* $(\alpha=5$ et $\beta=12)$.

Avec la deuxième méthode : $\alpha=5k+200$ et $\beta=-8k-300$

$5k+200>0$ et $-8k-300>0$

$5k+200>0 \Longrightarrow k>-40$

$-8k-300>0 \Longrightarrow k<-\dfrac{300}{8}$ d'où $-40<k<-\dfrac{300}{8} \Longrightarrow k\in\{-39\,;\,-38\}.$

Pour $k=-39$ on a : $\alpha=5$ *et* $\beta=12$

Pour $k=-38$ on a : $\alpha=10$ et $\beta=4$

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y'-2y=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x)=e^{2x}g(x)$.

Montrons que la fonction f est solution (E) si et seulement si $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Supposons que f est solution de (E) et montrons que $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

f solution de $(E) \Leftrightarrow f'-2f=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow 2e^{2x}g(x)+g'(x)e^{2x}-2e^{2x}g(x)=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$$\Leftrightarrow g'(x)e^{2x}=\frac{-2}{1+e^{-2x}} \Longrightarrow g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

2. Déduisons toutes les solutions de (E).

Déterminons la fonction g

$g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Rightarrow g(x) = \int \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\,dx = \ln\left(1+e^{-2x}\right) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

La solution $f(x) = e^{2x}\left(\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c\right) = e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right) + ce^{2x}$.

Problème

A. **1.** On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a. On admet le resultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

Déduisons la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

- Ensemble de définition de g : $D_g = \{x \in \mathbb{R},\ x-1>0\} \cap]1\ ;\ +\infty[=]1\ ;\ +\infty[$
- Posons $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$

  quand $x \longrightarrow 1^+ \Rightarrow t \longrightarrow 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} [2(t+1) - t\ln t] = 2$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$.

b. Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[$.

$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - 1 = 1 - \ln(x-1)$.

c. Résolvons l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$ d'inconnue $x \in]1\ ;\ +\infty[$.

Prémière méthode **:** *Par étude.*

Posons : $h(x) = 1 - \ln(x-1)$ pour tout $x \in]1\ ;\ ;+\infty[$

- Dérivée h' :

  $h(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$ pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[$
- Les limites aux bornes de $]1\ ,\ +\infty[$

  $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = +\infty$;

  $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$
- Tableau de variation

x	1		$e+1$		$+\infty$
$h'(x)$	||		$-$		
$h(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Les points remarquables :

  $\mathcal{C}_h \cap (Ox) \Rightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = e \Rightarrow x = e+1$.

  D'après le tableau de variation de *h,* pour tout $x \in]1\ ;e+1[\ h(x) > 0$ d'où $S =]1\ ;e+1[$

Deuxième méthode **:** Utilisation de la bijection de la fonction exponentielle.

$1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x-1) > -1 \Leftrightarrow \ln(x-1) < 1 \Rightarrow x-1 < e \Rightarrow x < e+1$ donc $x \in]1\ ;e+1[\cap]1\ ;\ +\infty[=]1\ ;e+1[$ Par suite : $S =]1\ ;e+1[$

Troisième méthode **:** Par changement d'inconnue.

Posons $t = x-1$, l'inéquation devient $1 - \ln t > 0$.

Signe de $(1 - \ln t)$

Posons $1 - \ln t = 0 \Leftrightarrow \ln t = 1 \Rightarrow t = e$.

t	0		e		$+\infty$
$1-\ln t$	‖	$+$	0	$-$	

Dans le tableau ci - dessus pour tout $t \in]0\ ;\ e[$, $1-\ln t > 0 \Leftrightarrow (x-1) \in]0\ ;\ e[$, $1-\ln(x-1) > 0$
$(x-1) \in]0\ ;\ e[\Leftrightarrow 0 < x-1 < e \Leftrightarrow 1 < x < e+1 \Rightarrow x \in]1\ ;\ e+1[$ d'où $S =]1\ ;\ e+1[$

d. Étudions le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$

Signe de $g'(x)$:

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]1\ ;\ e+1]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante.

$\forall x \in [e+1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante.

e. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e+1\ ;\ e^3+1]$.

La limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x-(x-1)\ln(x-1)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\right)$$
$$= +\infty(2-\infty)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

L'extremum :

$g(e+1) = 2(e+1)-(e+1-1)\ln(e+1-1) = 2e+2-e = e+2$; $g(e+1) = e+2$

Tableau de variations

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0		$-$		
$g(x)$	‖ 2	$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après le tableau de variation de g, sur l'intervalle $[e+1\ ;\ +\infty[$ g est définie, continue et strictement décroissante donc g réalise une bijection de $[e+1\ ;\ +\infty[$ sur $]-\infty\ ;\ e+2]$. Or $0(zéro) \in]-\infty\ ;\ e+2]$ donc il existe un nombre réel $\alpha \in [e+1\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On sait que: $[e+1\ ;\ e^3+1] \subset [e+1\ ;\ +\infty[$, calculons :

$g(e+1) = e+2 > 0$,

$g(e^3+1) = 2(e^3+1)-(e^3+1-1)\ln(e^3+1-1) = 2e^3+2-3e^3 = -e^3+2 < 0$

$g(e+1)\times g(e^3+1) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $e+1 < \alpha < e^3+1$.

- Étudions le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

***Première méthode* :** Par lecture du tableau de variation de g.

D'après le tableau de variation de g :

Pour tout $x \in]1\ ;\ \alpha[$ $g(x) > 0$

Pour tout $x \in [\alpha\ ;\ +\infty[\ g(x) \leq 0$

Deuxième méthode : Avec le tableau de variation de g :

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	2	$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de $g(x)$		$+$			0	$-$	

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$

a. Déterminons $\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x)$ et prouvons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} = ?$

Posons $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{t}$

quand $x \longrightarrow +\infty$; $t \longrightarrow 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{t \to 0^+} t\ln\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) = \lim_{t \to 0^+} t\ln\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right) = \lim_{t \to 0^+} t\left(\ln(1-t^2) - 2\ln t\right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(t\ln(1-t^2) - 2t\ln t\right) = 0$$

b. Calculons $\varphi'(x)$.

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}.$$

Montrons que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $x^2(x^2-1) > 0$ donc $\varphi'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$ a le même signe que $g(x^2)$

c. Montrons que φ est croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}\ ;+\infty[$.

Posons $t = x^2$ $(t > 0)$, d'après la question 1°/e) on a :

Pour $t \in]1\ ;\alpha[\ g(t) \geq 0$ donc $1 \leq x^2 \leq \alpha$ et $x \in]1\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{\alpha}$, $g(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) \geq 0$ d'où φ est croissante.

Pour $t \in [\alpha\ ;\ +\infty[\ g(t) \leq 0$ donc $x^2 \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\alpha}$ et $x \in]1\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow x \in [\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$
$g(x^2) \leq 0 \Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$ d'où φ est décroissante.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1. Vérifions que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$ on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

$$\varphi\left(e^x\right)=\frac{\ln\left(\left(e^x\right)^2-1\right)}{e^x}=\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}=f(x).$$

2. deduisons – en :

a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}=-\infty.$$

b. La limte $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

Posons $t=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{t}$

quand $x\longrightarrow+\infty$; $t\longrightarrow 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to 0^+} t\ln\left(\frac{1}{t^2}-1\right)=\lim_{x\to 0^+} t\left(\ln\left(1-t^2\right)-2\ln t\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(t\ln\left(1-t^2\right)-t\ln t\right)=0$$

c. le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\left(\varphi\left(e^x\right)\right)'=\varphi'\left(e^x\right)\times e^x$

$\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $e^x>0$ donc $f'(x)$ a le signe que $\varphi'\left(e^x\right)$

Posons $e^x=t\Longrightarrow\ \in]0\,;\,+\infty[$

$\forall t\in]1\,;\,\sqrt{\alpha}]$, $\varphi'(t)\geq 0\ \Leftrightarrow\ \forall x\in]0\,,\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)]$, $\varphi'\left(e^x\right)\geq 0$ donc f est croissante sur $]0\,,\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)]$

$\forall t\in[\sqrt{\alpha}\ ;\,+\infty[$ $\varphi'(t)\leq 0\ \Leftrightarrow\ \forall x\in[\ln\left(\sqrt{\alpha}\right);\,+\infty[$, $\varphi'\left(e^x\right)\leq 0$ donc f est décroissante sur $[\ln\left(\sqrt{\alpha}\right);\,+\infty[$.

Tableau de variation de f:

x	0		$\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$	$\searrow$	0

3. Montrons que, pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$; $f(x)\leq\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

$\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f(x)\leq f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right)$

$$f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right)=\frac{\ln\left(e^{2\ln\sqrt{\alpha}}-1\right)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}}=\frac{\ln\left(e^{\ln\alpha}-1\right)}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}.$$

$$g(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0\Longrightarrow\ln(\alpha-1)=\frac{2\alpha}{\alpha-1}.$$

$$f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right)=\frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}\,(\alpha-1)}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}.\text{donc } f(x)\leq\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

4. Réproduisons et complétons le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	$-1{,}36$	0,33	0,68	0,66	0,54	0,30

5. Représentons graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 commc valeur approchée de α.