Série : Bât et elect—Bât

Exercice 1 :

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \end{cases}$$

1. Calculons U_1, U_2, U_3 et U_4

$U_1 = 5U_0 - 2 = 5(3) - 2 = 13$; $U_2 = 5U_1 - 2 = 5(13) - 2 = 63$

$U_3 = 5U_2 - 2 = 5(63) - 2 = 313$; $U_4 = 5U_3 - 2 = 5(313) - 2 = 1563$

2. $(V_n) : V_n = U_n - \frac{1}{2}$

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont précisera la raison.

$$V_n = U_n - \frac{1}{2} \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{2} = 5U_n - 2 - \frac{1}{2} = 5U_n - \frac{5}{2} = 5(U_n - \frac{1}{2}) = 5V_n$$

$V_{n+1} = 5V_n$, alors (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $V_0 = \frac{5}{2}$

b) Calculons $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de n

(V_n) étant une suite géométrique , on sait que $S_n = V_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ avec $V_0 = \frac{5}{2}$ et $q = 5$

$$S_n = \frac{5}{2}\left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right) = \frac{5}{8}(5^{n+1} - 1)$$

c) Calculons $S_n' = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n

$$V_n = U_n - \frac{1}{2} \Rightarrow U_n = V_n + \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} U_0 = V_0 + \frac{1}{2} \\ U_1 = V_1 + \frac{1}{2} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ U_n = V_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S'_n = V_0 + V_1 + ...+ V_n + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{(n+1)\ fois} = S_n + \frac{1}{2}(n+1) = \frac{5}{8}(5^{n+1} - 1) + \frac{1}{2}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{5^{n+2}}{8} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \Rightarrow S'_n = \frac{5^{n+2}}{8} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{8}$$

Exercice 2 :

1. a) Résolvons l' équation différentielle $(E) : 16y'' + y = 0$

L'équation caractéristique est : $16r^2 + 1 = 0$, alors $r = \frac{1}{4}i$ ou $r = -\frac{1}{4}i$

$y = A\cos\left(\frac{1}{4}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{4}x\right) avec\ A,B \in \mathbb{R}$

b) déterminons la solution g de (E) vérifiant $g(0) = 1$ et $g(2\pi) = -\sqrt{3}$

$g(0) = 1 \Rightarrow A = 1;\ g(2\pi) = -\sqrt{3} \Rightarrow B = -\sqrt{3}$;donc $g(x) = y = \cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \int_n^{n+1} e^x dx$

Montrons que (U_n) est une suite géométrique

$$U_n = \int_n^{n+1} e^x dx = [e^x]_n^{n+1} = e^{n+2} - e^n \Rightarrow U_{n+1} = e^{n+2} - e^{n+1} = e(e^{n+1} - e^n) = eU_n$$

$U_{n+1} = eU_n \Rightarrow (U_n)$ est une géométrique de raison $q = e$ et de premier terme $U_0 = e - 1$

Problème :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

1. $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

a) Dressons le tableau de variation de g

$Dg =]0; +\infty[$, $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[\ x > 0;\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	(3)	$\nearrow$	$+\infty$

$g(1) = 1^2 + 2 - 2\ln 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 + 2 - 2\ln 0 = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

b) Le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

$\forall x \in]0; +\infty[\ , g(x) > 0$

2.Trouvons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x - 1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$$

3.Exprimons en fonction de

$$f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[\ g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, alors $f\ est$ strictement croissante.

Déduisons le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	|| $+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4.Déterminons les asymptotes à la courbe (Cf) de f

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Longrightarrow x = 0$ est une asymptote verticale à (Cf)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on a une possibilité d'asymptote oblique

Soit , $y = x - 1$, $f(x) - y = \dfrac{2\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 0 \Longrightarrow$ $y = x - 1$ est l'équation de la droite asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$

5.Etudions la position de (Cf) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x - 1$

$f(x) - y = \dfrac{2\ln x}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[$ $x>0$, $2\ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$, (Cf) *et* (D) se rencontre au point d'abscisse $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y$	||	$-$	0	$+$	

$\forall\ x \in]0;1[$, la droite (D) est au-dessus de (Cf)

$\forall\ x \in]1;+\infty[$, (Cf) est au-dessus de la droite (D)

6.Représentation graphique de (Cf) et (D)