Exercice1 :

1. Pour tout nombre complexe z; on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

   a. Calculons $P(-1)$

   $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$ **(0,50*pt*)**

   b. Déterminons les réels a; b tels que, $\forall z \in \mathbb{C}$ on ait: $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

   Première méthode : Tableau d'hőner :

   -1 est une racine de P alors P est divisible (*factorisable*) par $z+1$

	1	-3	3	7
-1		-1	4	-7
	1	-4	7	**0**

   D'où $a = -4$; $b = 7$ alors $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$ **(0,50*pt*) + (0,50*pt*)**

   Deuxième méthode : Division euclidienne

   -1 est une racine de P alors P est divisible (factorisable) par $z+1$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 3z^2 + 3z + 7 & z+1 \\ \underline{-z^3 - z^2} \qquad\quad & = z^2 - 4z + 7 \\ -4z^2 + 3z \quad & \\ \underline{+4z^2 + 4z} \quad & \\ 7z + 7 & \\ \underline{-7z - 7} & \\ 0 & \end{array}$$

   D'où $a = -4; b = 1$

   $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

   Troisième méthode : Coefficients indéterminés

   $P(z)$ est factorisable par $(z+1)$. Alors il existe les complexes a ; b tels que

   $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b) \Leftrightarrow P(z) = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + 1$

   Par identification:

$$\begin{cases} a+1 = -3 \\ a+b = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ \\ b = 7 \end{cases} \qquad \text{D'où } P(Z) = (Z+1)(Z^2 - 4Z + 7)$$

   c. Résolvons l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$

   $P(z) = 0 \Rightarrow (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \Rightarrow z + 1 = 0$ ou $z^2 - 4z + 7 = 0$

   $z = -1$

   $z^2 - 4z + 7 = 0$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 28 = -12 = 12i^2$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3} \; ; \; z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$$

   $S = \{-1;\ 2 - i\sqrt{3}\ ; 2 + i\sqrt{3}\}$ **(1*pt*)**

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ On désigne par A; B; C et G les points du plan d'affixes respectives $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$

   a. Plaçons les points A; B; C et G. (*voir figure*) **(0,50*pt*)**

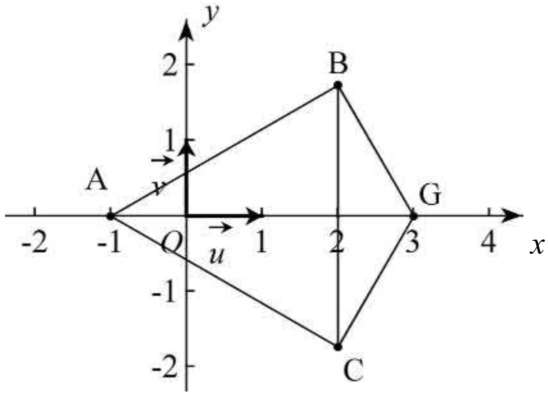
   b. Calculons les distances : *AB; BC* et *AC*

$d(A,B) = \left|Z_B - Z_A\right| = \left|2 + i\sqrt{3} + 1\right| = \left|3 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ **(0,50*pt*)**

$d(B,C) = \left|Z_C - Z_B\right| = \left|2 - i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}\right| = \left|-2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ **(0,50*pt*)**

$d(A,C) = \left|Z_C - Z_A\right| = \left|2 - i\sqrt{3} + 1\right| = \left|3 - i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ **(0,50*pt*)**

Le triangle ABC est équiletéral . **(0,50*pt*)**



c. Calculons un argument du nombre complexe $\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_G}$ puis déduisons la nature du triangle GAC

$$\frac{Z_G - Z_C}{Z_G - Z_G} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\left(-3 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{1+3} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

Ainsi si θ est un argument de $\left(\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right)$ alors $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ **(0,50*pt*)**

Alors GAC est un triangle rectangle en C. **(0,50*pt*)**

Exercice 2 :

1. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

a. Calculons $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$

$$I_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 2.$ **(1*pt*)**

b. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x)dx$; calculons $I_1 + I_2$ et déduisons la valeur de I_2

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(0,50*pt*)

$I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2} \implies I_2 = \dfrac{1}{2} - I_1 \implies I_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e}{2}\right) \quad I_2 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e}{2}\right).$

(0,50*pt*)

Autre méthode **:**

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

Ainsi $I_1+I_2=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx+\int_0^1 \left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx \Rightarrow I_1+I_2=\int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2}+x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$I_1+I_2=\int_0^1 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

2. a. Déterminons trois réels a; b; c tels que pour tout $u\neq\frac{1}{2}$: $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}$

$$\begin{array}{r|l}
u^2-1 & 2u-1 \\ \cline{2-2}
-u^2+\frac{1}{2}u & =\frac{1}{2}u+\frac{1}{4} \\ \cline{1-1}
\frac{1}{2}u-1 & \\
-\frac{1}{2}u+\frac{1}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{4} &
\end{array}$$

Ainsi $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{4}$ $c=-\frac{3}{4}$. **(1pt)**

b. Calculons $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

$\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}dx=\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3}{4(2x-1)}\right)dx=\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)dx-\frac{3}{4}\int_{-1}^0 \frac{1}{2x-1}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right]_{-1}^0-\frac{3}{8}\int_{-1}^0 \frac{2}{2x-1}dx=0-\left[\frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^0=\frac{3}{8}\ln 3.$

$\int_0^1 \frac{x^2-1}{2x-1}dx=\frac{3}{8}\ln 3.$ **(1pt)**

Problème :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$; et $\mathcal{C}$ sa courbe répresentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. On pose $g(x)=x^3+3x+8$.

a. Etudions le sens de variation de g :

Les limites aux bornes de $D_g=]-\infty\,;+\infty[$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Dérivée :

$g'(x)=3x^2+3$ **(0,50pt)**

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g'(x)>0$ donc g est strctement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de g.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

La fonction g est définie continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

$g(-1) = 4$ *et* $g(-2) = -6 \Rightarrow g(-1) \times g(-2) < 0$ *d*'où $\alpha \in]-2; -1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires **(0,50*pt*)**

Tableau de balayage

x	$-1,1$	$-1,2$	$-1,3$	$-1,4$	$-1,5$	$-1,6$	$-1,7$
$g(x)$	3,27	2,67	1,90	1,06	0,13	$-0,90$	$-2,01$

d'après le théorème des valeurs intermédiare $-1,6 < \alpha < -1,5$ **(0,50*pt*)**

Précisons le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Si $x \in]-\infty; \alpha[\Rightarrow g(x) < 0$

Si $x \in]\alpha; +\infty[\Rightarrow g(x) > 0$ **(1*pt*)**

2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

a. Calculons $f'(x)$ et étudions son sens de variation

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2+1)^2} \quad \textbf{(0,50}\boldsymbol{pt}\textbf{)}$$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante;

Si $x \in]\alpha; 0[$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

Si $x \in \{\alpha, 0\}$ $f'(x) = 0$ alors f est constante **(0,50*pt*)**

b. Etudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis dressons le tableau de variation de f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty; \quad \textbf{(0,25pt)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \textbf{(0,25}\boldsymbol{pt}\textbf{)}$$

Tableau de variation: **(0,50*pt*)**

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Montrons qu'il existe quatre réel a; b; c *et* d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 + 1}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad -4 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 - x} \quad & = x \\ -x - 4 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = x + \dfrac{-x-4}{x^2+1}$ $a = 1; b = 0; c = -1; d = -4$ **(1pt)**

b. Déduisons – en que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique (Δ)

Comme $f(x)$ est sous la forme $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \dfrac{-x-4}{x^2+1}$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$

d'où $y = x$ est une asymptôte oblique à $\mathcal{C}$. **(0,50*pt*)**

Etudions la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique

$f(x) - y = x + \dfrac{-x-4}{x^2+1} - x = \dfrac{-x-4}{x^2+1}$

$x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in Df$, donc $f(x) - y$ a le même signe que $-x-4$

$-x-4 = 0 \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$ $\quad -4 \quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+ \quad 0 \quad -$

Sur $]-\infty; -4[$ $f(x) - y > 0$ d'où $\mathcal{C}$ est au dessus de (Δ).

Sur $]-4; +\infty[$ $f(x) - y < 0$ d'où $\mathcal{C}$ est au dessous de (Δ). **(0,50*pt*)**

Vérifions en particulier que $\mathcal{C}$ rencontre Δ en un point unique A

$f(x) = y$ admet -4 comme solution donc le point $A(-4; f(-4))$ est l'unique point de rencontre des deux courbes. **(0,50*pt*)**

4. Déterminons les abscisses des points B et B' de ($\mathcal{C}$) admettant une tangente parallèle à (Δ)

(Δ): $y = x$ et (T): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Si $\Delta // T \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^4 + 3x_0^2 + 8x_0}{(x_0^2+1)^2} = 1 \Rightarrow x_0^4 + 3x_0^2 + 8x_0 = x_0^4 + 2x_0^2 + 1$

$\Rightarrow x_0^2 + 8x_0 - 1 = 0$

$\Delta' = 16 + 1$

$x_0 = -4 - \sqrt{17}$ *ou* $x_0 = -4 + \sqrt{17}$ **(0,50*pt*)**

d'où les abscisses des points B et B' sont respectivement $x_0 = -4 - \sqrt{17}$ *et* $x_1 = -4 + \sqrt{17}$.

5. Vérifions que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

$f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3 - 4}{\alpha^2 + 1} = \alpha - \dfrac{\alpha + 4}{\alpha^2 + 1}$

$\alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha + 2\alpha + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 + 1) = -2(\alpha + 4)$

$\Leftrightarrow \alpha + 4 = -\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$

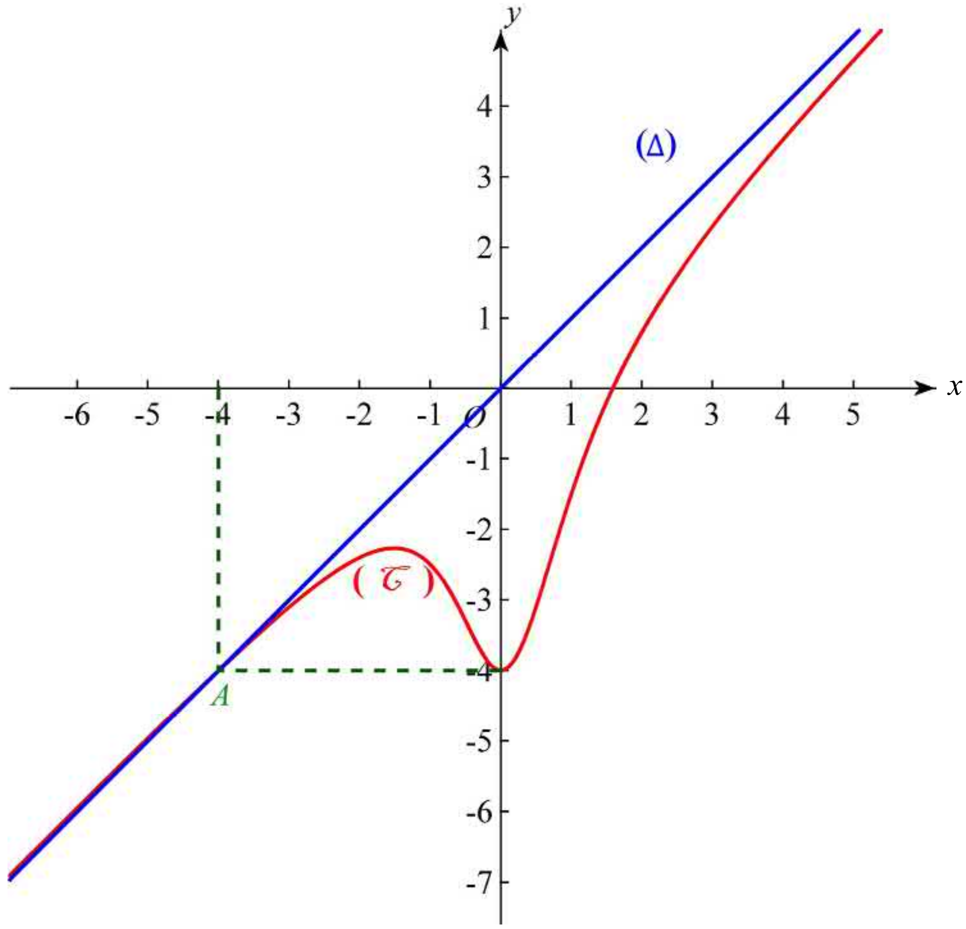
$f(\alpha) = \alpha + \dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2(\alpha^2+1)} = \alpha + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{2}\alpha$

$f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$. **(0,50*pt*)**

Déduisons-en une valeur approchée de $f(\alpha)$

$-1,6 \leq \alpha \leq -1,5 \Leftrightarrow -2,4 \leq f(\alpha) \leq -2,25$ **(0,50*pt*)**

6. Construction de la courbe $\mathcal{C}$ de f **(1,00*pt*)**


y
4
3
2
1
x
-6
-5
-4
-3
-2
-1
O
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
(Δ)
($\mathcal{C}$)
A