Exercice 1 :

Le plan P est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}\ ; \vec{v}\right)$. Unité graphique 5 cm.

$A \longmapsto Z_A = 1 + i$ et $B \longmapsto Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

On considère le cercle de centre O et de rayon $r = 1$.

1. Donnons la forme trigonométrique de Z_A et Z_B.

1ère méthode :

$$Z_A = 1 + i = \frac{\sqrt{2}^{\,2}}{2}(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ d'où}$$

$$Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

***2ème méthode* :**

Module et argument de Z_A :

$$\left|Z_A\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Soit $\theta_A = Arg(Z_A)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \dfrac{\pi}{4}$

La forme trigonométrique de Z_A. : $Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Module et argument de Z_B :

$$\left|Z_B\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit $\theta_B = Arg(Z_B)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_B = \dfrac{3\pi}{4}.$

La forme trigonométrique de Z_B : $Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C), d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0\,;2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point de (C), associe $f(M)=MA\times MB$.

a. Montrons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

1$^{\text{ère}}$ Méthode :

$$e^{i2\alpha}-1=e^{i2\alpha}-e^{0}=e^{i\alpha+i\alpha}-e^{i\alpha-i\alpha}=e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)=e^{i\alpha}(2i\sin\alpha)=2i\sin\alpha.e^{i\alpha}.$$

2$^{\text{ème}}$ méthode :

$$\begin{aligned}e^{i2\alpha}-1&=\cos2\alpha+i\sin2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-1+2i\sin\alpha\cos\alpha=\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha=-2\sin^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha=\\&=2i^2\sin^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha=2i\sin\alpha(i\sin\alpha+\cos\alpha)\\&=2i\sin\alpha\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)=2i\sin\alpha\,e^{i\alpha}.\end{aligned}$$

3$^{\text{ème}}$ méthode :

On sait que $\sin\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$.

$$2ie^{i\alpha}\sin\alpha=2i\times e^{i\alpha}\times\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)=e^{i2\alpha}-1$$

b. Montrons l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

$$\begin{aligned}f(M)&=\left|Z_A-Z_M\right|\times\left|Z_B-Z_M\right|=\left|(Z_A-Z_M)(Z_B-Z_M)\right|\\&=\left|Z_A\,Z_B-Z_M(Z_A+Z_M)+Z^2{}_M\right|=\left|-\frac{1}{2}(1+i)(1-i)-e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+e^{2i\alpha}\right|\\&=\left|-1-e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+e^{i\alpha}\right|=\left|e^{i2\alpha}-1-e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|\end{aligned}$$

d'où $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-e^{i2\alpha}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)\right|$.

c. Déduisons que : $f(M)=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$

$$\begin{aligned}f(M)&=\left|e^{i2\alpha}-1-e^{i2\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|=\left|2i\sin\alpha\,e^{i\alpha}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|\\&=\left|e^{i\alpha}\right|\times\left|2i\sin\alpha-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=1\times\left|-\frac{1}{2}+i\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)\right|\\&=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}\end{aligned}$$

3. a. Montrons qu'il existe 2 points M de (C) dont on donnera les coordonnées pour lesquels $f(M)$ est minimale.

Soit g la fonction à variable réelle α associée à f définie par $g(\alpha)=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$

Étudions la fonction g :

Dérivée de la fonction g.

$$g'(\alpha)=\frac{2(2\cos\alpha)\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}}=\frac{\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}}.$$

Signe de $g'(\alpha)$

$\forall\, \alpha \in [0\,;2\pi[\,,\ \sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2} > 0$ d'où $g'(\alpha)$ a le même signe que $\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)$.

Posons $\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=0$ ou $-3+4\sin\alpha=0$

$\cos\alpha=0 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

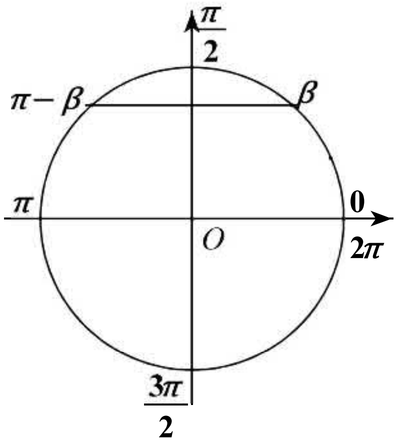
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow 0^2+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1 \Longrightarrow \sin\alpha=-1$ ou $\sin\alpha=1$

$-3+4\sin\alpha=0 \Leftrightarrow 4\sin\alpha=3 \Longrightarrow \sin\alpha=\dfrac{3}{4}\in[-1\,;1]$ donc il existe un angle $\beta\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ telque $\sin\beta=\dfrac{3}{4}$.

$$\sin\alpha=\sin\beta \Longrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta+2k\pi\\ ou \\ \alpha=\pi-\beta+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\dfrac{9}{16} \Longrightarrow \cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Tableau de signe :



Pour tout $\alpha\in[0\,;\beta]\cup[\pi-\beta\,;2\pi]$, $\sin\alpha\leq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow -3+4\sin\alpha\leq 0$

Pour tout $\alpha\in[\beta\,;\pi-\beta]$, $\sin\alpha\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow -3+4\sin\alpha\geq 0$

Pour tout $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\cos\alpha\geq 0$

pour tout $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ $\cos\alpha\leq 0$

D'après le cercle trigonométrique on a :

α	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos\alpha$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-3+4\sin\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Les extremums

$$g(\beta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin\beta)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+3)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$g(\pi-\beta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin(\pi-\beta))^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin\beta)^2}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\left(-3+4\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3-4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Tableau de variation de g :

α	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$

D'aprés le tableau de variation de g, $f(M)$ admet deux points de (C) de coordonnées respectives $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)$et $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)$ où $f(M)$ est minimal. Cette valeur minimale est $1/2$.

2[ème] ***méthode* :**

$f(M)$ est minimale si et seulement si $\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0$

$\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sin\alpha=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{3}{4}.$

Soit $\beta\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\beta=\frac{3}{4}$

$\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ou $\alpha=\pi-\beta.$

La valeur minimale de $f(M)$ est $\frac{1}{2}$.

b. D'après le tableau de variation de g :

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)<g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ dont il existe un seul point M de (C) de coordonnées $(0\,;\,-1)$. Cette valeur maximale est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 :

I. a. Le nombre de tours de chaque roue pour la première fois dans leur position initiale :

1[ère] ***méthode* :**

Soient x le nombre de tours de la roue (A) et y le nombre de tours de la roue (B) :

On l'équation : $12x=18y.$

Résolution par la congruence :

$12x=18y \Leftrightarrow 2x=3y \Leftrightarrow 2x\equiv 0[3] \Leftrightarrow x\equiv 0[3] \Rightarrow x=3k.$

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$2(3k)=3y \Rightarrow 2k=y$

Pour $k=1 \Rightarrow x=3$ et $y=2$

Résolution par la méthode de Gauss :

$12x=18y \Leftrightarrow 2x=3y$

On sait que $2\nmid 3$ d'après Gauss $3|x$ et $2|y \Rightarrow x=3k$ et $y=2k.$

Pour $k=1 \Rightarrow x=3$ et $y=2.$

2[ème] ***méthode* :**

Roue A a 12 dents et Roue B a 18 dents.

le nombre de tours des roues :

$PPCM(A\,;B)=PPCM(12\,;18)$

$12=2^2\times 3$ et $18=2^2\times 3^2$

$PPCM(12\,,36)=2^2\times 3^2=4\times 9=36.$

Soient x et y le nombre de tours respectif de A et B

$12x=36 \Rightarrow x=\dfrac{36}{12}=3$

$18y=36 \Rightarrow y=\dfrac{36}{18}=2$

3ème *méthode* : par la table de valeurs

Nombre de tours	1	2	3	
Roue A	12	24	36	
Roue B	18	36		

Donc 3 tours de la roue A et 2 tours de la roue B, les deux roues sont dans leur position initiale pour la première fois

b. Le nombre de dents de la roue (C)

1ère *méthode* :

Soit z le nombre de tours de la roue (C) et α le nombre de dents de la roue (C) $(\alpha>12)$.

$z\alpha=10\times 12$

$z\times\alpha=120$

Par décomposition on a :

$120=1\times 120=2\times 60=3\times 40=4\times 30=5\times 24=6\times 20=8\times 15$

Donc $(z=1 \text{ et } \alpha=120)$ ou $(z=2 \text{ et } \alpha=60)$ ou $(z=3 \text{ et } \alpha=40)$ ou $(z=4 \text{ et } \alpha=30)$ ou $(z=5 \text{ et } \alpha=24)$ ou $(z=6 \text{ et } z=20)$ ou $(z=8 \text{ et } \alpha=15)$.

2ème ***méthode* :**

Soit x le nombre de dents de la roue A et y le nombre de tours de la roue C :

$\begin{cases} \dfrac{PPCM(A,C)}{12}=10 \\ \dfrac{PPCM(A,C)}{x}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PPCM(A\,,C)=120 \\ PPCM(A\,,C)=xy \end{cases} \Leftrightarrow xy=120.$ Par décomposition on a :

$120=1\times 120=2\times 60=3\times 40=4\times 30=5\times 24=6\times 20=8\times 15$

Donc $(y=1 \text{ et } x=120)$ ou $(y=2 \text{ et } x=60)$ ou $(y=3 \text{ et } x=40)$ ou $(y=4 \text{ et } x=30)$ ou $(y=5 \text{ et } x=24)$ ou $(y=6 \text{ et } x=20)$ ou $(y=8 \text{ et } x=15)$

II. On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Déterminons et construisons le point $G=bary\{(A\,;1)\,;(B\,;\,-1)\,;(C\,;1)\}$. On a :

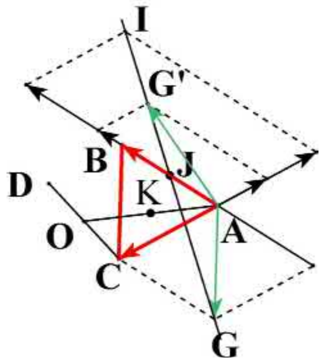
$G=bary\{(A\,;1)\,;(B\,;\,-1)\,;(C\,;1)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ (*Voir figure ci− dessous*).

b. Déterminons et construisons le point $G'=bary\{(A\,;1)\,;(B\,;5)\,;(C\,;\,-2)\}$. On a :

$G'=bary\{(A\,;1)\,;(B\,;5)\,;(C\,;\,-2)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{G'A}+5\overrightarrow{G'B}-2\overrightarrow{G'C}=\vec{O}$

$\overrightarrow{G'A}+5\overrightarrow{G'B}-2\overrightarrow{G'C}=\vec{O}\Rightarrow \overrightarrow{AG'}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.(*Voir figure ci− dessous*)



2. a. Soit J le milieu de $[AB]$.

J milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JA}=\vec{O}$ ou $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exprimons :

- $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}=-\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où

$\overrightarrow{GG'}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{JG'}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AG'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où

$\overrightarrow{JG'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

- Déduisons l'intersection des droites (GG') et (AB).

1ère ***méthode :***

Considérons le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

L'équation de la droite (GG').

$\overrightarrow{GG'}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{GG'}\begin{pmatrix}9/4\\3/2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(GG')$ tel que $\text{dét}\left(\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GG'}\right)=0$

$$\text{dét}\left(\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GG'}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1 & 9/4\\ y-1 & -3/2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}(x+1)-\frac{9}{4}(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)+3(y-1)=0\Leftrightarrow 2x+3y-1=0$$

d'où (GG') : $2x+3y=1$.

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, (AB) a pour équation la droite $y=0$.

On a, le système :

$$\begin{cases}2x+3y=1\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/2\\ y=0\end{cases}\text{ donc }(GG')\cap(AB)=\left\{\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

2ème *méthode :*

$\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = 3\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{JG'}$ donc $J \in (GG')$ et $J \in (AB)$ d'où $(GG') \cap (AB) = \{J.\}$

b. Montrons que le barycentre $I = bary\{(B\,;2)\,,(C\,;\,-1)\} \in (GG')$.

Coordonnées du point *I.*

1ère *méthode* :

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ d'où $I\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vérifions que : $I \in (GG')$.

$I \in (GG') \Longrightarrow 2x_I + 3y_I = 1$

$2x_I + 3y_I = 2(2) + 3(-1) = 4 - 3 = 1$ vraie donc $I \in (GG')$

2ème *méthode* :

$I = bary\{(B\,;2)\,,(C\,;\,-1)\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JI} + 3\overrightarrow{IG'}$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{G'G} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{IB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI}$

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI}$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$$

$= \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{JG'} + 3\overrightarrow{G'I}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GG'} + 3\overrightarrow{G'I}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GG'} + 3\overrightarrow{G'I} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{G'I}$ d'où $I \in (GG')$

3ème *méthode* :

$I = bary\{(B\,;2)\,,(C\,;\,-1)\} \Leftrightarrow I = bary\{(B\,;6)\,,(C\,;\,-3)\}$

$G = bary\{(A\,;1)\,;(B\,;\,-1)\,;(C\,;1)\}$

$G' = bary\{(A\,;1)\,;(B\,;5)\,;(C\,;\,-2)\} \Leftrightarrow G' = bary\left\{\underbrace{(A\,;1),(B\,;-1)\,;(C;1)}_{G}\ \underbrace{(B\,;6),(C;\,-3)}_{I}\right\}$

$\Leftrightarrow G' = bary\{(G;1),\,(I;3)\}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = 3\overrightarrow{G'I}$, d'où $I \in (GG')$

3. Soit D un point quelconque du plan.

O milieu du segment $[CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$

K milieu du segment $[OA] \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KA} = \vec{O}$.

Déterminons trois réels a, d et c telsque K soit barycentre de $\{(A\,;a)\,,(C\,;d),(C\,;c)\}$

1ère ***méthode* :**

$K = bary\{(A\,;a)\,,(D\,;d),(C\,;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{KA} + d\overrightarrow{KD} + c\overrightarrow{KC} = \vec{O}.$

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-\overrightarrow{KC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-4\overrightarrow{KC}=2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KD}-4\overrightarrow{KC}=-\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KA}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{O}$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{O}$ par identification : $a=2$;$d=c=1$.

$2^{ème}$ ***méthode*** :

$K=bary\{(A;a),(C;d),(C;c)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}+c\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{O}.$

K milieu de $[OA]\Leftrightarrow \overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OK}$ ①

O milieu de $[CD]\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$ ②

① + ② $\Rightarrow \overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{O}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{O}.$$

Par identification on a : $a=2$; $d=c=1$

Problème :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et $\left\|\vec{i}\right\|=4$ cm et $\left\|\vec{j}\right\|=2$ cm..

Partie A :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}.$

(C) la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

   On sait que :

   $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2+\cos x\le 3\Longrightarrow 2+\cos x>0$ et $e^{1-x}>0$ d'où $f(x)>0$.

2. a. Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=\cos x+\sin x.$$

D'où $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

   b. Déduisons - en que, pour tout x $\in\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.

   $1^{ère}$ ***méthode :***

   On a : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\cos x+\sin x\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}\le 2+\cos x+\sin x\le 2+\sqrt{2}$$

   d'où $2+\cos x+\sin x>0$

   $2^{ème}$ ***Méthode :***

$2+\cos x+\sin x=2+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

d'où $2+\cos x+\sin x>0$

c. Montrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons f' :

$f'(x)=-\sin x\times e^{1-x}-(2+\cos x)e^{1-x}=-(2+\cos x+\sin x)e^{1-x}$.

Signe de $f'(x)$

D'après la question précédente , pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$ et $-e^{1-x}<0$ donc $f'(x)<0$ par suite f est strictement décroissante.

3. a. Montrons que, tout pour $x\in\mathbb{R}$, $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

On sait que : $-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow 1\leq 2+\cos x\leq 3\Leftrightarrow e^{1-x}\leq(2+\cos x)e^{1-x}\leq 3e^{1-x}$

d'où $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

b. Déduisons - en les limites :

- en $-\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}\leq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

- en $+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}\leq\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leq\lim\limits_{x\to+\infty}3e^{1-x}\Leftrightarrow 0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\leq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

c. Interprétons géomériquement le resultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

4. a. Montrons que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique

1ère ***méthode* :**

Posons $g(x)=f(x)-3$

Étudions la fonction g :

- Dérivée : $g'(x)=f'(x)<0$
- Les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-3)=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3)=-3$
- Tableau de variation de g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	-3

D'après le tableau de variation de g, sur $\mathbb{R}$, g est définie, continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-3;+\infty[$. $0\in\,]-3;+\infty[$ alors il existe une solution unique $\alpha\in\mathbb{R}$, par suite léquation $f(x)=3$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$.

2ème ***méthode* :**

f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$ alors elle réalise une bijection de $[0;\pi]$ vers $[f(M);f(0)]=[e^{1-\pi},3e]$. Or $3\in[e^{1-\pi},3e]$, il existe donc une et une seule solution $\alpha\in[0;\pi]$ telle que $f(x)=3$.

b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$g(0)=3e-3\ >0$ et $g(\pi)=e^{1-\pi}-3<0 \Longrightarrow g(0)\times g(\pi)\leq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire $\alpha\in[0\,;\pi]$.

Encadrement d'ordre zéro :

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	0,15	$-0,46$	$-2,43$		

Encadrement d'ordre un :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$g(x)$	0,37	3,63	2,32	1,92	1,74	1,21	0,73	0,29	- 0,10

Encadrement d'ordre 2 :

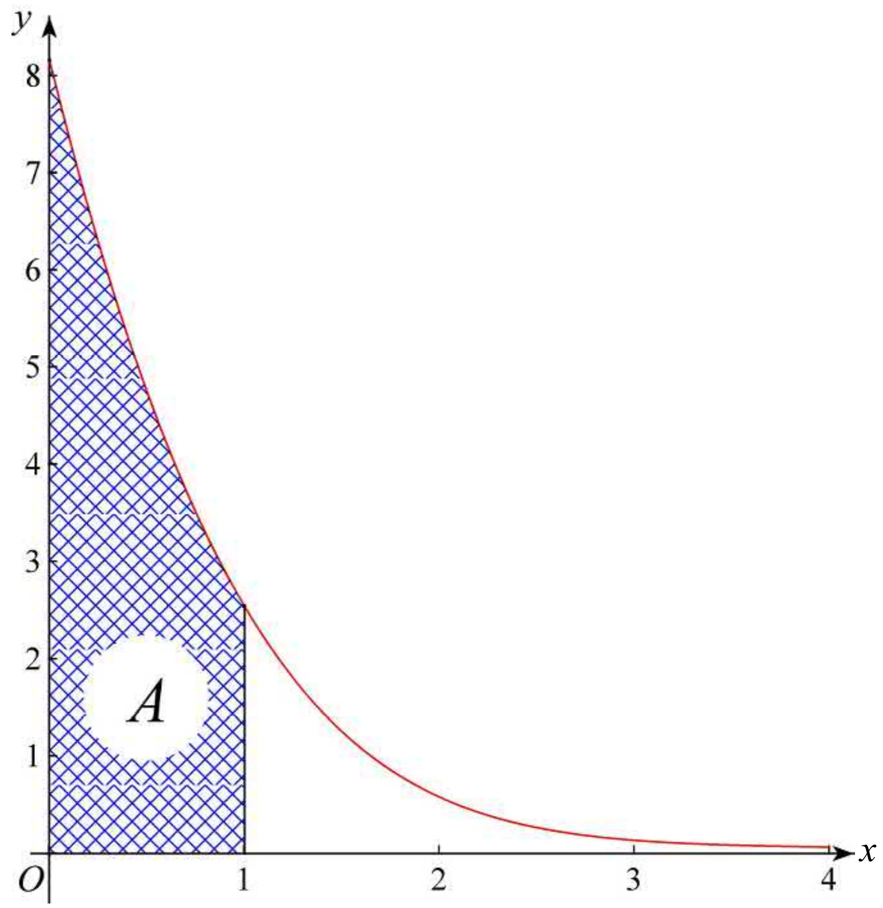
x	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
$g(x)$	0,25	0,21	0,17	0,13	0,09	0,05	0,01	0,01	- 0,03

D'où $0,87\leq\alpha\leq 0,88$.

5. Représentons la courbe (C) sur $[0\,;4]$.

Tableau de variation de f :

x	$0 \qquad\qquad\qquad 4$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$3e \searrow (2+\cos 4)e^{-3}$



Partie B :

On veut Calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$:

$$A = \int_0^1 |f(x)|dx \times Ua = \int_0^1 f(x)dx \times Ua.$$

1. Montrons que $A = \left(2e - 2 + \int_0^1 e^{1-x}\cos x\, dx\right) \times Ua.$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2 + \cos x)e^{1-x}dx = 2\int_0^1 e^{1-x}dx + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx$$

$$= -2\int_0^1 -e^{1-x}dx + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx$$

$$= -2\left[e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx = -2 + 2e + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx$$

d'où $A = \left(2e - 2 + \int_0^1 e^{1-x}\cos x\, dx\right) \times Ua.$

2. On pose $I = \int_0^1 e^{1-t}\cos t\, dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt$.

   a. À l'aide d'intégration par parties, montrons que : $I = e - j - \cos 1$ et $J = I - \sin 1$.

   - $I = \int_0^1 e^{1-t}\cos t\, dt = ?$

     Posons :

     $u = \cos t \Rightarrow u' = -\sin t$

     $v' = e^{1-t} \Rightarrow v = -e^{1-t}$

     $I = \left[-\cos t\, e^{1-t}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt = -\cos 1 + e - J$ d'où $I = e - j - \cos 1$

   - $J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt = ?$

     Posons :

     $u_1 = \sin t \Rightarrow u_1' = \cos t$

     $v_1' = e^{1-t} \Rightarrow v = -e^{1-t}$

     $J = \left[-\sin t\, e^{1-t}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-t}\cos t\, dt = -\sin 1 + I = I - \sin 1.$

   b. Déduisons - en la valeur de I.

   $I = e - J - \cos 1 = e - (I - \sin 1) - \cos 1$

   $I = -I + \sin 1 - \cos 1 + e$

   $2I = e + \sin 1 - \cos 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1).$

3. Déterminons la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donnons une valeur approché de A à 10^{-2} par défaut.

$$A = \int_0^1 f(x)dx \times Ua = \left[2e - 2 + \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1)\right] \times 8\text{cm}^2$$

$$= (16e - 16 + 4 + e + 4\sin 1 - 4\cos 1)\text{cm}^2$$

$$= (20e + 4\sin 1 - 4\cos 1 - 16)\ \text{cm}^2$$

$$= 39{,}57\ \text{cm}^2.$$

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. a. Montrons que la fonction h admet des primitive sur $\mathbb{R}$.

   Ensemble de définition de h : $D_h = \mathbb{R}$

On sait que $\sin x$ et $2+\cos x$ sont continues $\mathbb{R}$ donc $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. h est définie et continue sur$\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives.

b. Calculons la primitive H de la fonction h, qui prend en zéro la valeur $(1+\ln 3)$.

$H(x) = \int_0^1 h(x)d\,x = \int_0^1 \left(-1-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx = -x + \ln\left|2+\cos x\right| + c$ donc

$H(x) = -x + \ln(2+\cos x) + c$

$H(0) = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow\ -0 + \ln(2+\cos 0) + c = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 + c = 1 + \ln 3 \Rightarrow c = 1.$

$H(x) = -x + 1 + \ln(2+\cos x).$

2. a. Déterminons $\ln(f\ (x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(f\ (x)) = \ln((2+\cos x)) = \ln(2+\cos x) + \ln e^{1-x} = \ln(2+\cos x) + 1 - x$ donc :

$\ln(f\ (x)) = -x + 1 + \ln(2+\cos x).$

b. Étudions le sens de variation de la fonction H.

Dérivée de H :

$H'(x) = h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2+\cos x} = \dfrac{-2-\cos x-\sin x}{2+\cos x} = \dfrac{-(2+\cos x+\sin x)}{2+\cos x}$

D'après la partie A, 2°) c) on a : $-(2+\cos x+\sin x) < 0$ donc $H'(x) < 0$ d'où H est strictement décroissante.

c. Tableau de variation de H.

Les limites aux bornes de H.

On constate que : $H(x) = \ln(f\ (x))$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(f\ (x)) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(f\ (x)) = -\infty$

Tableau de variation de H :

x	$-\infty$		$+\infty$
$H'(x)$		$-$	
$H(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. La fonction définie par : $x \mapsto 1 - x + \ln(2+\cos x)$, (Δ) la droite d'équation $y = 1 - x$.

a. Étudions la position relative de (Γ) et de (Δ)

Signe de $(H(x) - y)$.

$H(x) - y = 1 - x + \ln(2+\cos x) - (-x+1) = \ln(2+\cos x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(2+\cos x) \geq 0 \Rightarrow H(x) - y \geq 0$ d'où (Γ) est au dessus de (Δ).

b. Déterminons les abscisses des points communs de Γ et Δ.

$H(x) = y \Leftrightarrow \ln(2+\cos x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. a. Établissons une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.

$x_0 = 0,\ \ H(0) = 1 + \ln 3,\ \ H'(0) = -1$

$(T) : y = -1(x) + 1 + \ln 3 \Leftrightarrow (T) : y = -x + 1 + \ln 3.$

b. Étudions la postion relative de (Γ) et (T) :

$H(x) - y = 1 - x + \ln(2+\cos x) - (-x+1+\ln 3) = \ln(2+\cos x) - \ln 3 = \ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)$

On sait que , pour tout x $\in \mathbb{R}$ $1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2+\cos x}{3} \leq 1$ donc $\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right) \leq 0$ d'où

(Γ) est en dessous de (T).

5. .La courbe (Γ) est continue dans la bande du plan limitée par les droites (Δ) et (T) car $(\Delta)//(T)$.