

Exercice 1.....(6 pts)

On se propose de résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation

$$(E) : z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = 0.$$

- Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E).
- Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :
 $z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = (z-iy)(z^2 + az + b)$.
- Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 2.....(6 pts)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = e^{2n-1}$.

- Calcule U_0, U_1, U_2, U_3 et U_{n+1} .
 - Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - Exprime en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
 - Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
 - Trouve la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$.
- Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$. On pose $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
 Exprime le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ en fonction de T_n .

Problème.....(8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et on note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ puis précise la position relative de (C_f) et (Δ) .
- Etudie les variations de la fonction dérivée f' de f .
 - Calcule $f'(1)$ puis en déduis le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; +\infty[$.

c. Dresse le tableau de variations de f .

4. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $1,9 < \alpha < 2$ et $-0,6 < \beta < -0,5$.

5. Calcule la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ puis en donne une interprétation géométrique.

6. Trace (C_f) et (Δ) .