Ministère de l'Éducation Nationale	**République du Mali**
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation	**Un Peuple-Un But-Une Foi**
EXAMEN : Baccalauréat Général	BAC 2020
Série: Terminale Sciences Exactes (**TSE**) et Sciences et Technologie Industrielle (**STI**)	SESSION : Septembre 2020
Épreuve: Mathématiques Durée: 4 heures	Coefficient: 4

Exercice 1………………………………………………………………………….(5 pts)

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe z différent de z_B, on pose $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$.

1. Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
   a. Z soit un réel ;
   b. Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;
   c. Z soit de module 1.
2. Calcule $|Z - 1| \times |z - z_B|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2………………………………………………………………………….(5 pts)

1. Démontre que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $3^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   b. Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
   c. Etudie le cas où $p = 3n + 2$.

Problème…………………………………………………………………………(10 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

$A)$ Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = \ln\left(e^{2x} + 2e^{-x}\right)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique: 2cm.

1. Montre que pour tout réel x positif : $f(x) = 2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)$.
2. a. Etudie la limite de f en $+\infty$.
   b. Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C), quand x tend vers $+\infty$.
   c. Etudie la position de (C) et (D).

3. Etudie les variations de f .

4. Trace (C) et (D).

5. Montre que, pour tout réel α , $\alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

6. Etablis que, pour tout réel u , $u \geq 0 : \ln(1+u) \leq u$.

7. En déduis que, pour tout réel α , $\alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.

8. Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine limité par les droites d'équations $x = 0$; $x = \alpha$; $y = 2x$ et la courbe (C) .

En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α .

B) 1. Etudie les variations de la fonction h définie dans l'intervalle $[2;4]$ par : $h : x \mapsto h(x) = 2 - x + \ln x$; en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β .

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Montre que l'image de l'intervalle $[2;4]$ par la fonction $g : x \mapsto 2 + \ln x$ est incluse dans l'intervalle $[2;4]$.

3. Montre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier naturel n : $|u_n - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. En déduis que (u_n) est convergente.

6. Détermine un entier N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.