IRE: Conakry
DCE: Dixinn
Institution Sainte Marie

Compositions du premier trimestre

Epreuve de mathématiques :

Sujet:

Durée: 4heures
Classe: TSM
Date : 19 janvier 2023
M.Khamus`_M.Pinto

Exercice 1 : 2 points

1.Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$; on a : $2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right)$.

2.On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

Exercice 2 : 5 points

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $9x + 5y = 1$

a. Montrer que si $(x; y)$ est une solution de (E), alors $x^2 \equiv 1[5]$.

b. Donner une solution particulière de (E), puis résoudre l'équation (E).

c. En déduire les solutions du système $(S) \begin{cases} 9x + 5y = 1 \\ x \equiv y[3] \end{cases}$

2. Soit N un entier tel qu'il existe un couple d'entiers $(a; b)$ vérifiant : $\begin{cases} N = 9a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a. Montrer que le couple $(a; -b)$ est une solution de (E).

b. Pour tout entier m, montrer l'équivalence $\begin{cases} m \equiv 1[9] \\ m \equiv 2[5] \end{cases}$ si et seulement si$m \equiv 37[45]$.

c. Trouver alors le reste de la division euclidienne de N par 45.

3. Pour rembourser les frais mensuels de transport de ses employés(cadres et ouvriers), l'entreprise GUICOPRES a dépensé une somme de 1 000 000 FG.

Sachant que les cadres ont reçu 90 000 FG chacun et 50 000 FG chacun, combien pouvait-il y avoir de cadres et d'ouvriers dans cette entreprise ?

Exercice 3 : *5 points*

Soit ABC un triangle ayant ses angles aigus et A' ; B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A ; B et C.

1. Prouver que $\frac{tan\hat{B}}{tan\hat{C}} = \frac{A'C}{A'B}$

2.En déduire que A' est le barycentre de $(B; tan\hat{B})$ et $(C; tan\hat{C})$.

3. Quel est le barycentre du système de points $(A; tan\hat{A})$ $(B; tan\hat{B})$ et $(C; tan\hat{C})$?

Exercice 4: *8points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm

1.On rappelle que pour tout tous nombres complexes a et b, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2.On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives a ; b et c définies par :

$a = 2$; $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$.

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r'la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives des points B' et C'.

a. Placer avec précision les points A ; B et C dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Calculer b' et c'.

3.On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$; $[BB']$; $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m ; n ; p et q leurs affixes respectives.

a. Montrer que l'affixe du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. En déduire que les points O,N et C sont alignés.

b. Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. En déduire la nature du triangle MNQ.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

NB : *La calculette et le correcteur ne sont pas autorisés, la copie doit être sans rature et paginée.*