LES CHEMINS VERS LE BAC

CONSEILS PRATIQUES

▪ L'ÉPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES AU BACCALAURÉAT

Le texte de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat comporte deux exercices et un problème indépendants les uns des autres. Le barème des points attribués au problème et aux exercices peut être indiqué sur le sujet. Dans tous les cas, vous devez savoir qu'il doit respecter les limites suivantes : 8 à 12 points pour le problème, 4 à 6 points pour les exercices.
Les modalités des épreuves sont les suivantes :
Série C : durée 4 heures coefficient 5
Série D : durée 4 heures coefficient 4

▪ CONSEILS POUR REUSSIR UN DEVOIR DE PROBABILITE

1. Face à un exercice de probabilités

- Commencer par bien lire l'énoncé.
- Certaines expressions permettent de traduire tout de suite l'hypothèse d'équiprobabilité (« au hasard », « dé non pipé », « boules indiscernables au toucher», ...).
- La formulation du problème conduit souvent à un schéma (arbre, tableau, ...) qui traduit la situation et aide à résoudre l'exercice.
- Certains énoncés utilisent des données statistiques qui peuvent être traduites en termes probabilistes (par exemple, 25 % correspond à une probabilité de $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$)

2. Méthodes classiques

- Un événement complexe peut se traduire comme la réunion de plusieurs événements incompatibles plus simples : on est alors amené à calculer la probabilité de chacun de ces événements, et à utiliser la propriété suivante :

Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

- Utiliser la propriété suivante : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ lorsque le calcul de $p(\overline{A})$ est plus simple (c'est-à-dire conduit à moins de cas) que celui de $p(A)$;

Par exemple, lorsque A se traduit par « au moins un... », $\overline{A}$ se traduit par « aucun ».

3. Règles à ne pas oublier

- Toute probabilité est comprise entre 0 et 1.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 (n'est jamais mentionné dans l'énoncé, mais doit toujours être présent à l'esprit).
- Vérifier la cohérence des résultats vis-à-vis des données de l'exercice et ne pas négliger l'intuition ; par exemple, une population peu représentée conduira en général à une probabilité faible.

▪ CONSEILS POUR CONSTRUIRE UN DEVOIR DE MATHEMATIQUES

1) **Au début de l'épreuve**
    - Lisez attentivement tout l'énoncé.
    - Déterminer le temps maximum que vous devez employer pour traiter, rédiger et relire les exercices et le problème en fonction des indications du barème. A titre indicatif sachez que vous avez dans la majeur partie des cas 45 minutes pour chaque exercice et 2 heures 30 minutes pour le problème.
    - Commencer par l'exercice qui vous paraît « le plus facile »
2) **Pendant l'épreuve**
    - Chercher d'abord les questions au brouillon. Si vous terminer l'exercice recopiez-le ; si vous n'arrivez pas à résoudre une question, relisez une fois de plus votre brouillon et la question. Si tout vous paraît juste, commencez la rédaction : « la mise au propre », en faisant ressortir les résultats obtenus dans les premières questions, ces résultats vous aideront dans la suite du devoir.
    - Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat donné dans l'énoncé, laisser du blanc dans votre copie et continuez votre exercice ou votre problème.
    - N'oubliez pas qu'une réponse doit être justifiée.
3) **Présentation de votre copie**
    - Séparez les questions, encadrez ou soulignez les résultats : respectez les notations du texte.
    - N'abusez pas des effaceurs et des correcteurs (gomme, Blanco …), la copie devient parfois illisible.
    - Les représentations graphiques se font sur du papier millimétré. Si les unités ne sont pas précisées dans le texte, bien les choisir ainsi que la place de l'origine sur la feuille. N'oubliez pas que les tangentes aident à faire un meilleur graphique.
    - Les dessins des exercices de géométrie doivent comporter tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations.

BONNE COMPOSITION

Sujet 1

EXERCICE 1

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes:
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :
-- Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire;
-- Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire;
-- Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boule(s) tirée(s).
On définit les événements suivants:
— *D1:* « le dé indique 1»;
— *D2:* « le dé indique 2»;
— *D3:* « le dé indique 3»;
— G : « la partie est gagnée ».
1. a. Déterminer les probabilités $P_{D1}(G)$, $P_{D2}(G)$, et $P_{D3}(G)$.
b. Montrer alors que $P(G) = \dfrac{23}{180}$
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

EXERCICE 2

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{2} \end{cases}$.

1. Calculer u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier vos réponses.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n ; puis u_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n).

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

(b) Déterminer la limite de f en +∞.

2. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.

(b) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

3. Étudier le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis dresser son tableau de variation.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle [0 ; +∞[. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse $x = 1$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle]0 ; +∞[.

(a) Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Étudier le sens de variation de g′.
En déduire le signe de $g'(x)$ sur] 0 ; +∞ [.

(b) Étudier le sens de variation de g.
En déduire la position de la courbe C par rapport à la tangente D.

3. Construire la courbe C et la tangente D (unité graphique : 2 cm).

Sujet 2

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.
1. a) Déterminer l'affixe du point B_1, image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A, B et B'.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=(1+i)z+1$.
a) Montrer que B a pour image B' par f.
b) Montrer que A est le seul point invariant par f.
c) Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z'-z}{i-z} = -i$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction du point M' à partir de M, pour M distinct de A.
3. a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.
b) Démontrer que $z'-3-2i = (1+i)(z-2)$.
En déduire que si le point M appartient à Σ_1 alors son image par f appartient à un cercle Σ_2 dont on précisera le centre et le rayon.
c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

EXERCICE 2

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
Nombre lits X	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes Y	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points Mi (xi ; yi) correspondant à cette série statistique.
Unités graphiques :
En abscisse : 1 cm pour 10 lits
En ordonnée : 1 cm pour 20 postes.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r. Un ajustement affine est-il justifié ?
4. Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite D sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer D)
5. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer sur le graphique.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur IR par $f\left(x\right)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

(b) Vérifier que pour tout réel *x*, $f\left(x\right)=\frac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

(c) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle$]-1\,;+\infty[$ par : $g\left(t\right)=\frac{t}{1+t}-\ln\left(1+t\right)$.

(a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

(b) En déduire le signe de g(*t*) lorsque $t>0$.

3. (a) Calculer $f'\left(x\right)$ et l'exprimer en fonction de $g\left(e^{x}\right)$.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction *f* puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer les asymptotes à la courbe C et la courbe C.

Partie B

Soit *F* la fonction définie sur IR par $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$

1. Étudier le sens de variation de la fonction *F*.

2. (a) Vérifier que, pour tout nombre réel *t*, $\frac{1}{1+e^{t}}=1-\frac{e^{t}}{1+e^{t}}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^{t}}$.

(b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F\left(x\right)$.

(c) Vérifier que *F*(*x*) peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$(1)\quad F\left(x\right)=x-\ln\left(1+e^{x}\right)-f\left(x\right)+2\ln 2$$

$$(2)\quad F\left(x\right)=\ln\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)-f\left(x\right)+2\ln 2$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(x\right)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[F\left(x\right)-x\right]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Sujet 3

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe z_A = i et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) Soit *r* la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par *r*.

a) Déterminer une écriture complexe de *r*.

b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d) Placer les points A, B et C.

2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.

a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$i.

b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par *h*.

a) Déterminer une écriture complexe de *h*.

b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4) a) Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle CDE.

EXERCICE 2

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin de ton pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.
1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade?
2. a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.
b. On désigne par *A* l'événement «aucun animal n'est malade parmi les 10 »
On désigne par *B* l'événement «au moins un animal est malade parmi les 10 »
Calculer les probabilités de *A* et de *B*.
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9.
On note *T* l'événement «avoir un test positif à cette maladie» et *M* l'événement «être atteint de cette maladie ».
a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
b. Calculer la probabilité de l'événement T.
c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif?

PROBLÈME

On considère les fonctions numériques f et g définies sur IR par

$$f\left(x\right)=x^2e^{x-1}-\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad g\left(x\right)=\left(x+2\right)e^{x-1}-1.$$

Partie A

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$.
2 (a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
(b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
(c) En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.
(d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans R. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
(e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
(b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
(c) Dresser le tableau de variation de f

Partie B

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On se propose de déterminer la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.

1. Montrer que $f\left(\alpha\right)=\dfrac{-\alpha^3}{2\left(\alpha+2\right)}$.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h\left(x\right)=\dfrac{-x^3}{2\left(x+2\right)}$.

(a) Calculer $h'(x)$ pour x élément de [0 ; 1], puis déterminer le sens de variation de h sur [0 ; 1].
(b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. (a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.
(b) Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.

Partie C

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de C correspondant à l'intervalle [−0,2 ; 0,4], dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, avec les unités suivantes :

– sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 0,05 ;
– sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n\times10^{-4}$ (n entier relatif).

x	-0,2	-0,15	-0,1	-0,05	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$f(x)$												

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D

On désire maintenant calculer l'aire du domaine D délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, calculer $\int_0^{1-\ln 2} x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

2. En déduire $\int_0^{1-\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

3. Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine D, puis en donner une valeur approchée en cm^2.

Sujet 4

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = \dfrac{6+2u_n}{5} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $v_n = u_n - 2$.
   a. Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de *n*, et en déduire que $u_n = 5\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 2$.
   c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Illustration graphique

   Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2cm).

   Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+6}{5}$.

   a. Tracer la représentation graphique D de f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
   b. Placer sur l'axe des abscisses le point P_0 d'abscisse u_0. En utilisant les droites D et Δ, construire les points P_1, P_2 et P_3 de l'axe (O ; $\vec{i}$) d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3. A quoi correspond, sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des deux droites D et Δ?

EXERCICE 2

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleur variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit *n* un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.
On définit les événements suivants:
— *A :* «le jardinier a choisi le lot 1»;
— *B : «* le jardinier a choisi le lot 2»;
— J_n : «le jardinier obtient *n* tulipes jaunes ».
1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1?
b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi?
c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne *n* tulipes jaunes.
d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.
2. Probabilités conditionnelles
a. Montrer que : $P_B(J_n) = C_{50}^{n} 2^{-50}$.
b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne *n* tulipes jaunes.

c. On note p_n, la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que J_n, est réalisé. Établir que $p_n = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$.

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$?

Comment peut-on interpréter ce résultat?

PROBLÈME

Partie A

On se propose de résoudre sur IR l'équation différentielle : $(E): y'-2y = 2\left(e^{2x}-1\right)$

1. Montrer que la fonction h définie sur IR par $h(x) = 2xe^{2x}+1$ est solution de l'équation différentielle (E).
2. On pose $y = z+h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $z'-2z=0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution de (E) qui s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la partie B.

Partie B

On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = (2x-1)e^{2x}+1$.

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variation. En déduire le signe de g sur IR.
2. (a) Résoudre dans R l'inéquation $1-g(x) \geq 0$.

(b) Calculer l'intégrale I=$\int_0^{\frac{1}{2}}[1-g(x)]dx$.

(c) Interpréter graphiquement les résultats des questions (a) et (b).

Partie C

On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.
3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variation (on pourra utiliser la partie B).
4. Soit C la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$,

avec pour unités 4 cm sur (O ; $\vec{i}$) et 2 cm sur (O ; $\vec{j}$).

Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2}près, construire la courbe C pour les valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,2	-0,1	-0,05	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$												

Sujet 5

EXERCICE 1

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.(*On pourra s'aider d'un arbre pondéré*).
a. Quelles sont les valeurs prises par X?
b. Calculer $P(X = 0)$.
c. On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.
— Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.
— En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.
2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
Soit k un entier compris entre 1 et n.
Soit N l'événement: «la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
Soit A l'événement : «on obtient une boule blanche dans chacun des k -1 premiers tirages et une boule noire au k-ième ».
Soit B l'événement : «on obtient une boule blanche dans chacun des (n-k) derniers tirages».
Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct ; unité graphique 2 centimètres.
On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
Soit I le point d'affixe 2i.
On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i z$.
1. a. Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
b. Déterminer l'affixe du point A', image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+i$.
c. Montrer que les points A, I et A' sont alignés.
2. a. Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe 1 + i et de rayon $\sqrt{2}$.
b. Vérifier que le point A appartient à (Γ).
c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).
3. Soit B le point d'affixe $2+2i$ et B' l'image de B par f.
a. Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.
b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. Déterminer la nature du quadrilatère $OACA'$.

PROBLÈME

On considère la fonction *f* définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

1. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a) Pour $x\in[1;+\infty[$ calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
   b) Déterminer le sens de variation de *f* ', puis la limite de *f* ' en $+\infty$.
   c) En déduire le signe de *f* ' sur $[1;+\infty[$.
   d) Indiquer les variations de *f* et donner son tableau de variations.
3. On appelle C la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Tracer la droite d'équation $y=3$ et C en indiquant le point A de C d'abscisse 3.
4. On désigne par g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{3x}{x+3}$ et on appelle Γ sa courbe représentative.
   a) Donner le tableau de variations de g.
   b) Vérifier que, pour tout *x* de $[1;+\infty[$, on a : $f(x)-g(x)=xf'(x)$

Sujet 6

EXERCICE 1

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

1. a. Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
b. Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l'affixe du point I.
c. Faire une figure.
2. a. Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.
c. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant $\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

EXERCICE 2

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est utilisé.
On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M. supposées indépendantes. À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.
Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.
1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.
a). Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;
B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».
b). On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note - 1 à toute réponse incorrecte.
Calculer la probabilité de l'évènement C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».
2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit au 1 b ?

PROBLÈME

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur IR et qui vérifie les conditions :
$\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = -e$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -xe^{2x+1}$.
a). Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?
b). Étudier le sens de variation de f.
c). Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
d). Dresser le tableau de variations de f.
e). On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

Quelle est la tangente à (C) au point O? Écrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse (- 1).

f). On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ de la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^x$.

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (−1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur IR par : $h(x) = 1+exe^x$.

a). Étudier le sens de variation de h.

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b). Étudier la position de (C) par rapport à (Γ).

c). Tracer, sur le même graphique, les courbes T, (C) et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

a). Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

b). La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.

Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment [AB].

c). Prouver que J appartient à (C).

d). Tracer (D) et placer J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I(x) = \int_0^x te^{2t}dt$.

2. Soit x un réel négatif.

Calculer l'aire A(x), exprimée en cm2, de l'ensemble des points N (u ; v) du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient : $\begin{cases} x \le u \le 0 \\ 0 \le v \le f(x) \end{cases}$

3. Calculer A(− 1).

4. A(x) admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

Sujet 7

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à [0 ; 2π [, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe 1+z et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.
2. Déterminer l'ensemble des points E pour θ appartenant à [0 ; 2π[.
Tracer cet ensemble sur la figure précédente.
3. Soit S le point d'affixe $1+ z + z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M.
Construire S, en justifiant la construction.
4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?
Démontrer que le nombre $\dfrac{1+z+z^2}{2}$ est réel, quel que soit θ appartenant à [0 ; 2π[.
Conclure sur la conjecture précédente.

EXERCICE 2

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :
A : «On obtient des boules des deux couleurs » ;
B : «On obtient au plus une blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».
b. Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».
c. En déduire que les probabilités p(A∩B), p(A), p(B) sont :
$p(A\cap B) = \dfrac{n}{2^n}$, $p(A)= 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $p(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$.
2. Montrer que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n+1$.
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par
$u_n = 2^{n-1} -(n+1)$.
Calculer u_2, u_3, u_4.
Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

PROBLÈME

L'objet de ce problème est de résoudre une équation différentielle, d'en étudier une fonction solution et de calculer des aires.

Partie A

Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$.
2. Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble IR des nombres réels. On pose $f(x) = z(x)\, e^{-x}$.
a. Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de IR,
$z'(x) = e^x(x-1)$.
b. À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant, pour tout x de IR, $z'(x) = e^x(x-1)$.

Partie B

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

On désigne par C_f la courbe représentative de f.

1. a. Étudier le sens de variations de f.

b. Préciser $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a. Montrer que la droite (D), d'équation $y = x-2$, est asymptote à la courbe C_f.

b. Préciser la position de C_f par rapport à (D).

3. Tracer (D) et C_f.

Partie C

Calcul d'aires

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe C_f, son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.

Exprimer, à l'aide de x_0 l'aire S1 de ce domaine.

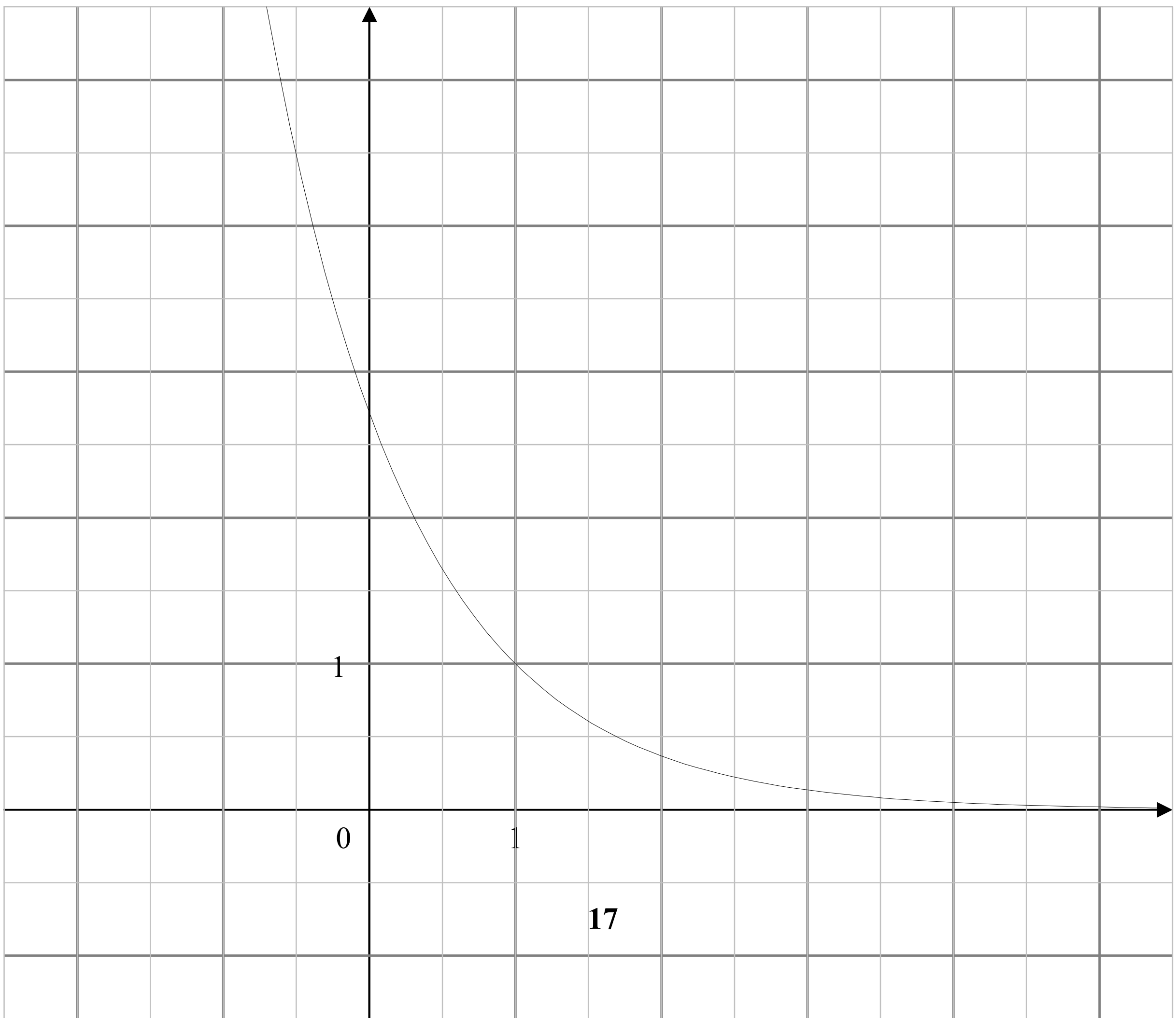
2. On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = e^{1-x}$, dont on trouvera la courbe représentative (Cg) en annexe. Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servie au calcul de S1 à l'aide de la courbe (Cg).

3. A est le point de coordonnées (x_0 ; 0). B est le point de la courbe (Cg) d'abscisse x_0.
Soit (T) la tangente à la courbe (Cg) au point d'abscisse x_0. C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de C.

4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S2 du triangle ABC.
Vérifier que S1 +2S2 = 0.

Annexe 1

Courbe représentative de la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{1-x}$



Sujet 8

EXERCICE 1

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac.

Partie A

On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Partie B

On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\frac{28}{351}$.
2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul ; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés, on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.

a. Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne, au total, $6n$ faces peintes.

b. Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit inférieur à 10^{-12}.

Les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous forme fractionnaire.

EXERCICE 2

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z)= Z^4-1$.

a. Factoriser P(Z).

b. En déduire les solutions dans l'ensemble C des nombres complexes de l'équation P(Z)= 0, d'inconnue Z.

c. Déduire de la question précédente les solutions dans C de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (l'unité graphique est 5 cm). Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $a=-2$, $b=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ et $c=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par : $z'=\frac{a-c}{d-c}$

En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

PROBLÈME

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur IR par $\varphi(x)=(ax+b)e^{-x}$.

1. a. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

b. Vérifier que, pour tout réel x : $\varphi(x)=-\varphi''(x)-2\varphi'(x)$.

2. Démontrer que φ admet une primitive Φ, définie sur IR par : $\Phi(x)=(Ax+B)e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b.

3. Déterminer a et b pour que : $\varphi(0)=5$ et $\varphi'(0)=-3$. Donner alors $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(2x-5)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Donner une interprétation graphique de cette deuxième limite.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère.
3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Soit I le point de la courbe (C) d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

Une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point I est $y = g(x)$. Déterminer $g(x)$.

5. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

a. Étudier le sens de variation de d', calculer $d'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d'.

b. Étudier le sens de variations de d, calculer $d\left(-\frac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d.

c. Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe (C).

6. Tracer la courbe (C) et la tangente (T).
7. Soit α un réel strictement positif. On note A (α) l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x=\frac{5}{2}$ et $x = \alpha$.

Calculer A (α). (On peut éventuellement utiliser le résultat de la partie I.)

Déterminer la limite de A (α) quand α tend vers $+\infty$.

Sujet 9

EXERCICE 1

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

On note :

B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

Les événements B_1 et B_2 **sont-ils indépendants ?**

EXERCICE 2

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2cm.

1. Résoudre, dans C, l'équation (E) : $z^3-8=0$.
2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=2$ et $z_C=-1-i\sqrt{3}$.
a. Écrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.
b. Placer les points A, B et C.
c. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{2i\frac{\pi}{3}}z$.
a. Caractériser géométriquement l'application f.
b. Déterminer les images des points A et C par f.
En déduire l'image de la droite (AC) par f.

PROBLÈME

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction *f* et de sa courbe représentative C

On considère la fonction *f*, définie sur]0 ; +∞[par : $f\left(x\right)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(-2+\ln x\right)$ et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer les limites de *f* en +∞ et 0.
2. Montrer que *f* est dérivable sur]0 ; +∞[et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur]0 ; +∞[par $u(x) = \ln x + x - 3$.
a. Étudier les variations de u.
b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3].
Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.
c. Étudier le signe de $u(x)$ sur [0 ; +∞[.
4. a. Étudier les variations de *f*.
b. Exprimer $\ln \alpha$ comme polynôme en α. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. a. Étudier le signe de $f(x)$.
b. Tracer C .

Partie B

⋆ Étude d'une primitive de *f* sur]0 ; +∞[.
Soit F la primitive de *f* sur [0 ; +∞[qui s'annule pour $x = 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur]0 ; +∞[.
b. Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
a. x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x lnt\,dt$ (on pourra faire une intégration par parties).
b. Montrer que, pour tout x strictement positif $f\left(x\right)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$.
c. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. a. Calculer la limite de F en 0.
b. Montrer que, pour x strictement supérieur à 1 $F\left(x\right)=x\ln x\left(1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x}\right)+3$.
En déduire la limite de F en + ∞.
c. Dresser le tableau de variation de F.
d. Tracer (Γ) sur le même graphique que (C).
4. Calcul d'une aire
Calculer, en cm² l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Sujet 10

EXERCICE 1

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1; 2; 3; 4)$, on note P_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres P_1 P_2 P_3 *et* P_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.
1. Sachant que $P_4 = 0,4$, démontrer que $P_1 = 0,1$; $P_2 = 0,2$ et $P_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
a. Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.
b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
c. Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
On note u_n, la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer
a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
b. Calculer $S_n, = \sum_{i=1}^{n} u_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S_{n0} > 0,999$.

EXERCICE 2

1. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2e^{1-x}$. O désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour C peut-on en tirer?
b. Justifier que f est dérivable sur **R.** Déterminer sa fonction dérivée f'.
c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.
b. Calculer I_1, puis I_2.
c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c).

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de [0; 1] et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln(x+2)$.
On note C_f la courbe représentative de f dans le plan munit d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ (*unité graphique 4 cm*)

Partie A – Étude de la fonction f

1) ***Étude des variations de la dérivée f' de f***
   a) f' désigne la dérivée première de f et f'' la dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x élément de l'intervalle $I =]-2;+\infty[$.
   b) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $I =]-2;+\infty[$.
   c) Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
2) ***Étude du signe de $f'(x)$***
   a) Montrer que sur l'intervalle $I =]-2;+\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-0,6;-0,5[$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
3) ***Étude des variations de f.***
   a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $I =]-2;+\infty[$.
   b) Déterminer les limites de la fonction f en -2 et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f (on montrera que $f(\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$)

Partie B – Position de la courbe C_f par rapport à ses tangentes

Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $I =]-2;+\infty[$, on appelle T_λ la tangente à C_f au point d'abscisse λ.
On note, pour x appartenant à l'intervalle $I =]-2;+\infty[$:

$$d(x) = f(x) - \left[f'(\lambda)(x-\lambda) + f(\lambda)\right]$$

1) **Étude des variations de d**
   a) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $I =]-2;+\infty[$:
   $$d'(x) = f'(x) - f'(\lambda).$$
   b) En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $I =]-2;+\infty[$.
2) Déterminer la position relative de C_f et de T_λ.

Partie C – Tracés dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer une équation de la tangente T_0 à C_f au point d'abscisse 0 ; tracer T_0.
2) Trouver tous les réels λ pour lesquels les tangentes T_λ passent par l'origine du repère ; puis tracer ces droites.
3) Tracer la courbe C_f pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2. On prendra pour α la valeur -0,54 et pour $f(\alpha)$ la valeur 0,8.

Sujet 11

EXERCICE 1

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.
Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.
2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants:
— A : « la montre tirée présente le défaut a»;
— B : « la montre tirée présente le défaut b»;
— C: «la montre tirée ne présente aucun des deux défauts»;
— D : «la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».
On suppose que les événements A et B sont indépendants.
1. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'événement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.
On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.
On définit l'événement E « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

1. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et déterminer sa dérivée.
   - **a)** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^3-2)^2$.
   - **b)** f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+1}$.
   - **c)** f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{5x+3}$.
   - **d)** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(1-x^2)$.

2. Trouver la primitive F de f sur I qui vérifie la condition donnée.
   - **a)** $f(x)=x^2-2x-3$; $\mathrm{F}(0)=0$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.
   - **b)** $f(x)=\dfrac{1}{2x^3}$; $\mathrm{F}(1)=1$; $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.
   - **c)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}+\dfrac{x}{2}$; $\mathrm{F}(2)=1$; $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.
   - **d)** $f(x)=\sin x\cos x$; $\mathrm{F}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Soit la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 3x^3 - x - 2$

1) a- Vérifier que $P(1) = 0$

   b- déterminer les nombres réels $a;b;c$ tels que pour tout réel x on ait

   $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

   c- Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

2) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$

   a- Déterminer la dérivée g' de g. Utiliser 1) pour donner le sens de variation de g (on ne demande pas les limites en 0 et $+\infty$.)

   b- Déduire de a- le signe *g(x)* suivant les valeurs de x

3) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x + \ln x}{x^2}$

On appelle ζ la courbe représentatif de f dans repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan

   a- Déterminer les limites f de en 0 et en $+\infty$

   b- Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ *et* $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe ζ .

   c- Démontrer que la fonction h tel que $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs négatives et positives. En déduire que(Δ) coupe ζ en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln\alpha = 0$. Démontrer que $0.56 < \alpha < 0.57$

   d- Déterminer la position de ζ par rapport à (Δ)

   e- Étudier le sens de variation de f . En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β Démontrer que $0.46 < \beta < 0.47$

   f- Construire ζ et (Δ).

Sujet 12

EXERCICE 1

Un hypermarché dispose de 20 caisses.
Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) Y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1. Construire le nuage de points Mi(xi ; yi) correspondant à cette série statistique.
Unités graphiques :
En abscisse : 1 cm pour une caisse ouverte
En ordonnée : 1 cm pour une minute d'attente.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. Un ajustement affine.
a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r.
b) Déterminer, l'équation de la droite de régression D de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite D sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer D)
c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de la droite D :
i) Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes.
ii) Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
iii) Pensez-vous que, dans le cas de la question ii), l'ajustement affine soit fiable ?
4. Un ajustement non affine.
On considère la fonction *f* définie sur]0 ; $+\infty$[par : $f(\mathrm{x}) = \frac{\lambda}{\mathrm{x}}$.
a) Déterminer λ de façon à avoir : *f* (3) = 16.
b) Tracer alors la représentation graphique C de *f* dans le repère utilisé pour le nuage.
c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant la fonction *f* :
i) Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes.
ii) Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

EXERCICE 2

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)z^2 + \left(1 - \sqrt{3}i\right)z - i = 0$;

1. Déterminer le réel *y* tel que *iy* soit solution de (E).
2. Déterminer les réels *a* et *b* tels que, pour tout nombre complexe *z* :
$z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)z^2 + \left(1 - \sqrt{3}i\right)z - i = (z - i)\left(z^2 + az + b\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
4. On considère dans le plan complexe le point *A* d'affixe z_A=i, le point *B* d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et le point *C* symétrique de *B* par rapport à l'axe des abscisses.
   a) Représenter sur un même graphique les points *A*, *B* et *C*.
   b) Déterminer le module et un argument du quotient : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
   c) En déduire en radian une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$ et la nature du triangle *ABC*.

PROBLÈME

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0{,}72\,;-0{,}71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1\,;+\infty[$

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble$]-1;0[\cup]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

1. **Étude de g aux bornes de son ensemble de définition**
   - **a)** Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   - **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. **Sens de variation de g**
   - **a)** Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la **Partie A**, son signe.
   - **b)** Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de g (α) en prenant $\alpha=-0{,}715$.
3. **Tableau de variations et représentation graphique de g**
   - **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   - **b)** Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

Sujet 13

EXERCICE 1

Les deux Parties A et B sont indépendantes.

Le plan est munit d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

Partie A

On pose $Z=\dfrac{1-2z}{iz+i}$ où z est un nombre complexe différent de -1.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan d'affixe z telle que : $|Z|=2$.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan d'affixe z telle que : $Z\in i\mathbb{R}$

Partie B

Soient les nombres complexes $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes z_1 , z_2 et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
3. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2$

.

   a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.
   b) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 2

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.
On note:

- M l'événement : " le personnel interrogé est un agent de maintenance " ;
- O l'événement : " le personnel interrogé est un opérateur de production " ;
- I l'événement : " le personnel interrogé est un ingénieur " ;
- F l'événement : " le personnel interrogé est une femme ".

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
   a) un agent de maintenance ;
   b) une femme agent de maintenance ;
   c) une femme.

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : " l'alarme se déclenche " ;

- B l'événement : " une panne se produit " ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

PROBLÈME

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{2x}$, (E).

1. Démontrer que la fonction u définie sur IR par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (E_0).
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur IR est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur IR par

$f(x) = (x+1)\, e^{2x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.

Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

3. Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan D limité par C , les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire D (α) du domaine D.
b. Déterminer la limite de D (α) lorsque α tend vers $-\infty$.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [0,2 ; 0,3].
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur une feuille de papier millimétré, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe C pour x appartenant à [0 ; 0,3].

Faire apparaître x_0 sur le graphique.

Sujet 14

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$ .On pose pour tout entier naturel n, $v_n = \ln u_n$.

1.
   a. Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Donner l'expression v_n en fonction de n . En déduire celle de u_n en fonction de n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$.
   a. Montrer que $P_n = e^{S_n}$.
   b. Exprimer S_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (S_n) ; en déduire celle de la suite (P_n) .

EXERCICE 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte ; laquelle ?

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est:

(a) 0,4. (b) 0,75. (c) $\frac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est:

(a) 0,3. (b) 0,8. (c) 0,4.

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est:

(a) 1,15. (b) 0,4. (c) 0,3.

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est:

(a) 0,9. (b) 0,7. (c) 0,475.

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est:

(a) $\frac{4}{150}$. (b) $\frac{12}{19}$. (c) 0,3.

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est:

(a) $1-(0,25)^{20}$. (b) $20 \times 0,75$. (c) $0,75 \times (0,25)^{20}$.

PROBLÈME

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;+\infty[$ par :

$f(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;+\infty[$ par : $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est note (Γ).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1\ ;+\infty[$, le signe de x^2-2x-1 et celui de $f(x)$.
b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
3. Déterminer une équation de la tangente note (T) la courbe (Γ) au point A de (Γ) dont l'abscisse est 0.
4. a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (Γ) en $B(1\ ;0)$ et $C(-1\ ;0)$.
b. Tracer les trois tangentes à la courbe (Γ) en A, $B(1\ ;0)$ et $C(-1\ ;0)$ et la courbe (Γ).

Partie B

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ sont définies par :

S est l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$,

$S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que $\begin{cases}1\le x\le u\\ f(x)\le y\le 0\end{cases}$.

Les aires respectives de ces surfaces sont notées A, $A_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_1^x f(t)\,dt$ où x est un réel positif.
En procédant par deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.
2. En déduire la valeur exacte de $\int_1^0 f(t)\,dt$.
En déduire la valeur exacte de l'aire A.
3. Déterminer, en fonction de u où $u\geqslant 1$, l'aire $A_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $A_1(u)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel $A_1(u)=A$.
a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$, l'équation $A_1(u)=A$ est équivalente à : $x=2\ln(1+x)$.
b. Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ par $h(x)=x-2\ln(1+x)$.
Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$, l'équation $x=2\ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, noté α, vérifie la condition $2<\alpha<3$.
c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, que vous pouvez déduire du précédent, d'amplitude 2×10^{-4}.

Sujet 15

EXERCICE 1

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On donnera les résultats sous forme décimale arrondie au millième. Voici quelques vers d'un poème de Pablo Neruda :

« *Parmi les plumes qui effraient, parmi les nuits*
Parmi les magnolias, parmi les télégrammes,
Parmi le vent du sud et l'ouest marin,
Te voici qui viens en volant. »

On recopie chacun des 29 mots de cette strophe (" l' " compte pour un mot) sur un carton que l'on place dans une urne.

1. On tire simultanément et au hasard trois cartons parmi les 29.

a) Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les trois mots : " parmi, les, plumes ".

b) Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois le mot " parmi " ?

2. On tire maintenant un seul carton de l'urne.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot " parmi " ?

b) On répète l'expérience 3 fois avec remise du carton tiré dans l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le mot " parmi ".

EXERCICE 2

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre, dans C, l'équation (E) : $z^3-8=0$.
2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=2$ et $z_C=-1-i\sqrt{3}$.

a. Écrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.

b. Placer les points A, B et C.

c. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=e^{2i\frac{\pi}{3}}z$.

a. Caractériser géométriquement l'application f.

b. Déterminer les images des points A et C par f.

En déduire l'image de la droite (AC) par f.

PROBLÈME

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f\left(x\right)=1+\dfrac{\ln x}{x}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de (C).
2. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e};1\right]$ une solution unique, notée α.

Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur]0 ; +∞[.

4. Tracer la courbe (C).

Partie B : Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1.

2. a. Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$.

Calculer $\varphi'(x)$.

En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. Montrer que, pour tout $x > 0, f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

c. En déduire la position relative de (C) et de (D).

3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la tangente (D).

a. Hachurer ce domaine.

b. Soit A son aire, en cm². Écrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en α.

Partie C : Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$. On note M_0 le point de (C) d abscisse x_0.

1. a. Donner une équation de la tangente (T_0) à (C) en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses. Écrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. On considère la fonction h définie sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$ par $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0)=x_1$).

a. Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x)\times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$

En déduire que $\dfrac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$, $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$

b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Sujet 16

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

1. Démontrer que f est impaire.
2. Étudier les variations de f ; puis dresser son tableau de variations.
3.
   a) Justifier que la fonction H définie pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$ par :
   $H(x)=(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)$ est une primitive de la fonction définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par $h(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

   b) En déduire une primitive de f sur $\left]1;+\infty\right[$

EXERCICE 2

Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient huit boules blanches et deux boules rouges.
Un joueur extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. A l'issue d'un tirage de trois boules :

Si aucune boule n'est rouge, le joueur perd 10 francs ;
Si une seule boule est rouge, le joueur gagne 5 francs ;
Si deux boules sont rouges, le joueur gagne 20 francs.
X est la variable qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue d'un tirage.
Donner la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique E(X).

2. Le joueur joue deux fois de suite selon les mêmes règles en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les trois boules extraites.

Y est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue des deux tirages.
Donner les valeurs possibles pour Y. Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement 10 francs à l'issue des deux parties. (On pourra s'aider d'un arbre).

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=x+e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\left[0;+\infty\right[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes positifs définie par $\begin{cases} u_1=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ u_{n+1}=f(u_n)=u_n+e^{-u_n} \end{cases}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(x+1)\leq x$.

On pourra étudier la fonction g définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $g(x)=x-\ln(x+1)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f\left[\ln(n)\right] = \ln(n) + \frac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leq u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}.$$
6.
   a) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$.
   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

   Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

Sujet 17

EXERCICE 1

Une urne A contient trois boules : une rouge, une bleue et une noire. Une urne B contient trois boules : une rouge et deux noires. Une urne C contient trois boules : deux bleues et une noire.
On tire une boule, au hasard, de chaque urne.
On suppose que, dans chaque urne, les tirages sont équiprobables.
1. a) Quelle est la probabilité p0 de n'obtenir aucune boule noire ?
   b) Quelle est la probabilité p1 d'obtenir exactement une boule noire ?
   c) Quelle est la probabilité p2 d'obtenir exactement deux boules noires ?
   d) Quelle est la probabilité p3 d'obtenir trois boules noires ?

Si on tire exactement une boule noire, on perd un point. Si on tire zéro ou deux boules noires, on gagne zéro point. Si on tire trois boules noires, on gagne trois points.
2. a)Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé ?
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?

EXERCICE 2

Partie A : *Restitution organisée de connaissances*

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1[p]$ ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.
1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a) Montrer que : $6\times 2^{p-2} \equiv 3[p]$ et $6\times 3^{p-2} \equiv 2[p]$.
   b) En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0[p]$.
   c) Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

A - ETUDE D'UNE FONCTION *f*

On définit la fonction *f* sur]0, + ∞[par $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$.

1. Calculer les limites de *f* en 0 et en + ∞.
2. Etudier le sens de variation de *f* sur]0, + ∞[.
3. Soit *C* la courbe représentative de *f* dans (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) et A le point de *C* d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de *C* d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe (O ; $\vec{u}$) et H le projeté orthogonal de B sur l'axe (O ; $\vec{v}$).
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) et représenter la courbe *C*.

B - UTILISATION D'UNE ROTATION

Soit *r* la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point M du plan d'affixe *z*, la rotation *r* associe le point M' d'affixe *z'*.

1.a. Donner *z'* en fonction de *z*.
On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x ,y, x' ,y' réels), exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
b. Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation *r*.

2. On appelle *g* la fonction définie sur **R** par $g(x) = e^{-2x} + 2\,e^{-x}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à C, son image M' par *r* appartient à Γ.
On admet que lorsque le point M décrit C, le point M' décrit Γ.
b. Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe Γ (l'étude des variations de *g* n'est pas demandée).

C - CALCUL D'INTEGRALES

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire *A* du domaine plan *D* limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe *C* d'extrémités B et A.
b. On pose $\mathrm{I} = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)dx$.

Trouver une relation entre A et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

Sujet 18

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A, G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O.
On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_A, P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O.
On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3. a) Montrer l'égalité $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

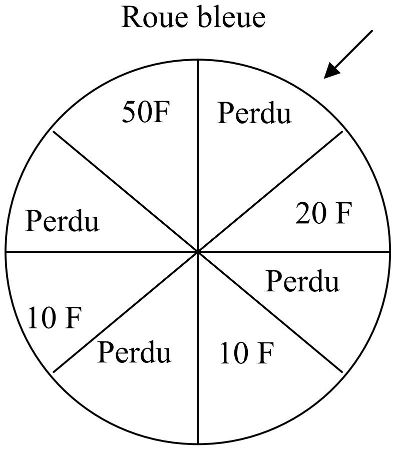
   b) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer l'ensemble $\left(\Gamma\right)$ des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

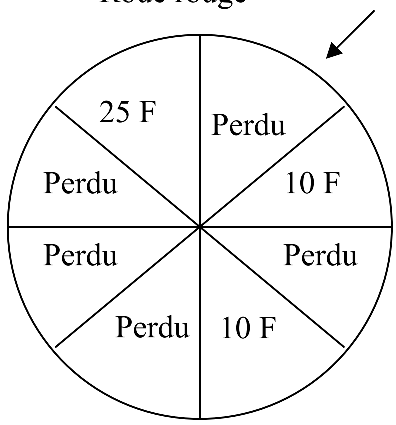
EXERCICE 2

Le club MATHEMATIQUES du lycée décide de monter un stand de loterie le jour de la kermesse de fin d'année. Cette loterie se déroule de la façon suivante :
Le joueur tire au hasard une boule dans une urne contenant 15 boules bleues et 10 boules rouges. S'il tire une boule bleue, il tourne la roue bleue, s'il tire une boule rouge, il tourne la roue rouge. Chaque roue est partagée en 8 secteurs de même dimension. Quand la roue est lancée, elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur.
Tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir ».

Roue bleue



Roue rouge



On note B l'événement : « tirer une boule bleue », R l'événement « tirer une boule rouge » et G l'événement « gagner ».
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles

1.
a) Calculer la probabilité de l'événement B puis celle de l'événement R.
b) On a tirer une boule bleue : quelle est la probabilité de gagner ?
c) En déduire la probabilité de $G \cap B$.

2. Calculer la probabilité de gagner à ce stand ?

3. Vérifier que la probabilité de gagner 50 F est $\frac{3}{40}$.

4. Soit X la variable aléatoire égale au gain (éventuellement nul) du joueur. Recopier le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X et calculer les résultats manquants.

gain x_i	0	10	20	25	50
$p(X=x_i)$			$\frac{3}{40}$		$\frac{3}{40}$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4cm).

Partie A – Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. Étudier la parité de *f*.
2. Quelles sont les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles *à* Γ **.**
3. Étudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que pour tout x appartenant *à* $\mathbb{R}$; $-1 < f(x) < 1$.
5. Calculer $f\left(0\right)$ et en déduire le signe de $f\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 *à* Γ au point d'abscisse 0.
2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'\left(t\right)=1-\left[f\left(t\right)\right]^2$ .En déduire un encadrement de *f'* (*t*).
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\int_0^x f'\left(t\right)dt$, puis justifier que $0\leq f\left(x\right)\leq x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point *A* d'ordonnée $\frac{1}{2}$.
5. Montrer que le point *B* de la courbe Γ **,** d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées $\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
6. Tracer Γ, Δ_1 et Δ_2 On placera les points *A* et *B*.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f\left(x\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, en déduire une primitive de *f*.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ **,** la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
   Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2dx$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 x\left(1-\left[f\left(x\right)\right]^2\right)dx=\frac{e^2-1}{e^2+1}-\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$.

   En déduire $\int_0^1 x\left[f\left(x\right)\right]^2dx$.

Sujet 19

EXERCICE 1

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

1. Un client achète une tablette de chocolat.

On considère les événements suivants :
G : « Le client achète une tablette gagnante » ;
U : « Le gagne exactement une place de cinéma » ;
D : « Le client gagne exactement deux places de cinéma ».

a. Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$
b. Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.
c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.

On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport - 3.

b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

d. Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$ où z_3 et z_4 sont les affixes respectives des points M_3 et M_4.

e. Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

PROBLÈME

PARTIE A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - \dfrac{1}{e^{-x} - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et calculer les limites de g aux bornes de cet ensemble.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = 0$.
3. Établir le tableau de variations de g; et en déduire le signe de g suivant les valeurs du réel x

PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \ln\left(4\left|1 - e^{x}\right|\right)$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.
2.
   a) Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty; 0\right[, \ f(x) = x + \ln 4 + \ln\left(1 - e^{x}\right) \\ \forall x \in \left]0; +\infty\right[, \ f(x) = 2x + \ln 4 + \ln\left(1 - e^{-x}\right) \end{cases}$

   b) Justifier que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x + \ln 4$ et $y = 2x + \ln 4$ sont des asymptote obliques à (C_f) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

   c) Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (C_f) et (D_1).

   d) Étudier la position de (C_f) et (D_2) sur $\left]0; +\infty\right[$.
3.
   a) f est dérivable sur D_f ; vérifier que : $\forall x \in D_f, \ f'(x) = g(x)$.

   b) Donner le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4. soit h la restriction de h à l'intervalle $\left]0; +\infty\right[$.

   a) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\left]0; +\infty\right[$ une unique solution λ et que : $0{,}18 < \lambda < 0{,}19$.

   b) Calculer les valeurs exactes de $h(\ln 2)$ et $\left(h^{-1}\right)'(\ln 8)$ où h^{-1} est la bijection réciproque de h.
5. Prouver que (C_f) rencontre l'axe des abscisses en deux points P et Q dont on donnera les coordonnées (*l'abscisse de* Q *est plus grande que celle de* P).
6. Tracer avec <u>soin</u> dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm)
   - La courbe (C_f) et toutes ses asymptotes. On marquera les points A, P et Q.
   - La courbe (Γ) de h^{-1}.

Sujet 20

EXERCICE 1

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 billes rouges et 3 billes vertes dans une boîte cubique et 3 billes rouges et 4 billes vertes dans une boîte cylindrique.

1) Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

a) Traduire par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b) Calculer la probabilité de l'événement R.

c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3) L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans **C** l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0$.

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. a. Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

   b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B'

image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

   a. Justifier les égalités suivantes :

   $$c\overline{c} = R^2 \; ; \; (c-2i)(\overline{c}+2i) = R^2 \; ; \; \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2.$$

   b. En déduire que $c - \overline{c} = 2i$ puis que $c + \overline{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

   c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

PROBLÈME

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation g(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que : $0,94 < \alpha < 0,941$.
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude d'une fonction *f*

La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier le signe de *f* sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de *f* et vérifier que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe. Dresser le tableau de variation de *f*.
4.
   a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

   b) Étudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right[$. En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite D, d'équation y = 2x − 5, est asymptote à C en $+\infty$. Préciser la position de C par rapport à D.
6. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Partie C – Calcul d'aire

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$

Partie D – Étude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse *n*, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite D et à la courbe C ; soit u_n le réel défini par : $u_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, on a : $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$
2.
   a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b) Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Sujet 21

EXERCICE 1

Le plan complexe **P** est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 2. Soit φ l'application de **P** vers **P** qui à tout point M d'affixe z associe le point $M'=\varphi\left(M\right)$ d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{4}z+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

1. Déterminer :
   a) L'affixe de l'image $\varphi\left(A\right)$ du point A.
   b) L'affixe du point P tel que $\varphi\left(P\right)=O$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ. (On pourra utiliser les résultats de la question 1.).
3. Lorsque le point M est distinct du point A :
   a) Démontrer que le triangle *AMM'*, où $M'=\varphi\left(M\right)$, est rectangle en M'.
   b) Le point M et le milieu du segment [*AM*] étant donnés, en déduire une construction au compas du point *M'*.

EXERCICE 2

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est- à- dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'évènement : «le premier test est positif».
On note C l'évènement : «d'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.

Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois. Un écran est facturé *a* euros *(a* étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire *X* qui, à chaque écran fabriqué, associe le «gain» (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de *X.*
b. Exprimer l'espérance de *X* en fonction de *a.*
c. À partir de quelle valeur de *a,* l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

PROBLÈME

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$.

4. Calculer les limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

5.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

b. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

6. Établir le tableau de variations de g.

a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. Vérifier que $g(0) = 0$.On note α la solution non nul de l'équation $g(x) = 0$; prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.

7. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2.

e) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

f) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f).

4.

c) Montrer la droite (D) et la courbe (C_f) se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.

d) Étudier la position relative de la droite (D) par rapport à la courbe (C_f).

5. Tracer avec <u>soin</u> dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm) la courbe (C_f) et la droite (D) on marquera les points A et B.

PARTIE C

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par : $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.

2. Soit λ un réel strictement supérieur à -1. On considère le domaine du plan (D_λ) délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$.

a) Calculer en cm² l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine du plan (D_λ).

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Sujet 22

EXERCICE 1

On considère la fonction *f* définie sur]−∞ ; 6[par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$.

On définit pour tout entier naturel *n* la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Étudier la fonction *f* et construire sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Construire dans le même repère la droite (d) d'équation $y = x$ puis placer sur l'axe des abscisses les 5 premier termes de la suite (u_n).Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?
2.
   a) Démontrer que si $x < 3$ on a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel *n*.
   b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   c) Que peut-on déduire des questions 2.a. et 2.b?
3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel *n*.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de *n*.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune *k* boules, où *k* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Un jeu se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1
- s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par *A*, *B*, *C* et *N* les événements suivants:
— *A*:«Le dé amène le numéro 1»;
— *B* : « Le dé amène un multiple de 3»;
— *C*: «Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de 3»;
— *N*: « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c) Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d) Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, *k* est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte, puis sous forme arrondie à 10^{-3} près par défaut, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ [unité graphique 4 cm].

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -x + (1+2x)e^{-x}$.

On appelle (C) la représentation graphique de f dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et (D) la droite d'équation $y = -x$.

PARTIE – A –

1. On note f' la dérivée de f et f'' sa dérivée seconde.

a) Pour tout x élément de IR, calculer $f'(x)$.

b) Montrer que pour tout nombre réel x, $f''(x) = (2x-3)e^{-x}$.

2.

a) Étudier le signe de $f''(x)$ sur IR, puis en déduire le sens de variation de f'.

b) Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f'.

d) Calculer $f'(0)$, puis donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

PARTIE – B –

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. En utilisant les résultats de la question 2.d) donner le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variations.

3. Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = f(x) + x$.

a) Calculer la limite de φ en $+\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Étudier la position relative de (C) et (D) et donner les coordonnées de leur point d'intersection P.

4. Tracer (C), (D) et placer P sur le même graphique.

PARTIE – C –

1. Soit *G* la fonction définie sur IR par $G(x) = (ax+b)e^{-x}$, où *a* et *b* désignent des nombres réels.

a) Déterminer *a* et *b* pour que *G* soit une primitive sur IR de la fonction *g* définie par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$.

b) En déduire une primitive de f sur IR.

2.

a) Soit (Γ) la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$. Calculer en cm², la valeur exacte de l'aire de (Γ).

b) En déduire, en cm² l'aire du domaine (Σ) des points $M(x;y)$ vérifiant les conditions : $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases}$ On donnera une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

Sujet 23

EXERCICE 1

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par : $f(x) = (x-1)e^{2x}$

1. Calculer pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
2. On se propose de résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ (1).
   a) Démontrer qu'une fonction g est solution de (1) si et seulement si $g - f$ est solution de $y' - 2y = 0$ (2).
   b) Résoudre l'équation (2) et en déduire toutes les solutions de l'équation (1).

EXERCICE 2

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b) Quelle est son espérance ?
   c) Calculer P(X = 2).

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements **D** et **A** suivants:
D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a) Calculer la probabilité des événements suivants :
   « Choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   « Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

   b) En déduire que: $p(A) = \frac{7}{48}$.
   c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

Déterminer, en fonction de n, la probabilité de l'événement B_n .

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{2x-2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On prendra 5 cm comme unité.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$
2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C).
   Étudier la position relative de (C) et (D).
4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).
5. **a.** On note I l'intervalle [0 ; 0,5]. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.
   b. Déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de a.
6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).

Sujet 24

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Unité graphique : 2cm.

1. On rappelle que pour tous nombres complexes a et b, $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3=8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par : $a=2$, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-1-i\sqrt{3}$.

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r′ la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On pose B′ = r (B) et C′ = r'(C) et on note b' et c' les affixes respectives des points B′ et C′.

a) Placer avec précision les points A, B et C dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b) Calculer b' et c'.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB′], [B′C′] et [C′C]. On note m, n, p et q leurs affixes respectives.

a) Montrer que l'affixe du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b) Montrer que $n+1=i\,(q+1)$. En déduire la nature du triangle MNQ?

c) Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

EXERCICE 2

1. résoudre l'équation différentielle : $f'+f=0 \quad (1)$.
2. Déterminer la fonction polynôme du second degré g solution de l'équation différentielle : $f'+f=\left(\frac{e-1}{2}\right)x^2+(e-2)x-1 \quad (2)$.
3. Démontrer qu'une fonction h est solution de l'équation (2) si et seulement si la fonction h-g est solution de l'équation (1).
4. Trouver la fonction h solution de l'équation (2) telle que $h(0)=1$.

PROBLÈME

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle$]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$$

Partie A - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to1}g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

c) Résoudre l'inéquation $1-\ln(x-1)>0$, d'inconnue x appartenant à l' intervalle $]1\,;+\infty[$.

d) Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

e) Montrer que l'équation g (x) = 0 a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $\left[e+1;e^3+1\right]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1\,;\alpha[$ et $]\alpha\,;+\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par : $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouver que : $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle]1 ; +∞[.

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $\left]1;\sqrt{\alpha}\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]\sqrt{\alpha};+\infty\right[$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[, on a : $f(x) = \varphi(e^x)$.

2. En déduire :

a) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞.

c) Le sens de variation de f sur l'intervalle]0 ; +∞[et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle]0 ; +∞[, $f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

4. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Sujet 25

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$; où z désigne un nombre complexe.

1.
   a) Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1.
   b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait : $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-z_1)(z-2-2i)(az+b)$.
2. Résoudre (E).

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, 2 + 2*i* et 1 − *i*.

3. Représenter les points A, B et C.
4. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.
5. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
6. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
7. Quelle est la nature du quadrilatère OCDB ?

EXERCICE 2

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois

- ❖ pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris;
- ❖ pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur et 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
   a) Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
   b) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
   c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient envie? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1000 francs si le poisson est rouge, 250 francs s'il est gris et perd 100 francs s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

PROBLÈME

Partie A : *Étude d'une fonction auxiliaire*

La fonction d est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $d(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$.

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en - 1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x>-1$, on a : $0<d(x)<e$.

Partie B : *Étude de la fonction f*

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle] - 1 ; + ∞ [par :

$$f(x)=x+1-e^{\frac{x}{x+1}}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-e+1$ est asymptote à la courbe (C). Préciser la position relative de (D) et (C).

2. a. Pour $x\in\,]-1\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; puis vérifier que : $f''(x)=\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}$

En déduire le sens de variations de f'.

   b. Dresser le tableau de variations de f'. (On admettra que $\lim\limits_{x\to-1} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$)

3. Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet sur $]-1\,;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0. *Dans la suite du problème, on notera* α *la solution non nulle*. Donner une valeur approchée de α au centième près.

4. a. Étudier les variations de f.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   c. Dresser le tableau de variations de f.

Partie C : *Prolongement de la fonction f en −1*

On considère la fonction g définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1)=0 \\ g(x)=f(x) \;\; si \;\; x\in\,]-1;+\infty[\end{cases}$$

On appelle (C ′) la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la partie B.

1. a. Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=1-\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

   b. Pour $x\in\,]-1\,;+\infty[$,déterminer la limite lorsque x tend vers-1de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}$

   c. En déduire que g est dérivable en - 1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et (C ′). Préciser les tangentes à (C ′) aux points d'abscisses − 1, α, 0.

Sujet 26

EXERCICE 1

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimer en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1.
   a) Représenter le nuage de points associés à cette série statistique.
   b) La recherche d'un ajustement linéaire est-elle justifiée ?
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en x.
3. Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs ; le prix de fabrication de chaque exemplaire est de 25000 francs.
   a) Déduire de la question précédente que le bénéfice $b(x)$ réalisé sur ce produit est donné par : $b(x) = -5{,}956x^2 + 1\ 427{,}18x - 59\ 957$. Où x est exprimer en milliers de francs.
   b) Déterminer, à un franc près, le prix de vente x permettant de réaliser le bénéfice maximum.
   c) Calculer le bénéfice maximum que peut faire cette entreprise.

EXERCICE 2

1. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
   a) Calculer P (4).
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm)

   Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 4$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.
   a) Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
   b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$. On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G?
   b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.
   a) Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.
   b) Calculer l'affixe du point H.
   c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

PROBLÈME

Soit *f* la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1-\ln x}$.

PARTIE 1

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*.
2. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Si oui, définir ce prolongement.

PARTIE 2

Soit la fonction g définie sur $[0;e[\cup]e;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{1-\ln x} & \text{si } x \in]0;e[\cup]e;+\infty[. \\ g(0) = 0. \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) unité graphique 1cm.

1.

- **a)** Calculer la limite de g en $+\infty$.
- **b)** Calculer les limites de g à gauche et à droite en *e*. Interpréter graphiquement les résultats.
- **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
- **d)** Démontrer que g est continue en 0.
- **e)** Étudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2.

- **a)** Démontrer que : $\forall x \in]0;e[\cup]e;+\infty[, g'(x) = \dfrac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}$.
- **b)** Étudier le signe de g'(x).
- **c)** En déduire les variations de g et dresser son tableau de variation.
- **d)** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- **e)** Construire (C), son asymptote et (T).

PARTIE 3

Soit h la restriction de g à $[0;e[$.

1. Démontrer que h est une bijection de $[0;e[$ dans un intervalle K à préciser.

Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa courbe dans le repère orthonormé direct (O,I,J) unité graphique 1cm.

2. h^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat.
3. Démontrer qu'une équation de la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 1 est : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
4. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
5. Construire (T'), (C') et son asymptote horizontale (dont on précisera une équation) dans le repère orthonormé direct (O,I,J) unité graphique 1cm.

Sujet 27

EXERCICE 1

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1. Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir trois chiffres dont la somme est égale à 6.
3. Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.
4. Le droit de participation au jeu est de 3000 francs.
   - Si le joueur obtient trois chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;
   - Si le joueur obtient trois chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs ;
   - Si le joueur obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur à l'issu d'une patrie. (On appelle gain algébrique d'un joueur, la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise)

a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Déterminer le gain moyen d'un joueur à l'issu d'une partie. Le jeu est-il équitable ?

EXERCICE2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.
b. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
3. Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$

1. a. Résoudre dans C l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$
b. En déduire les points associés aux points B et C.
c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.
2. **a. Question de cours** :
Pré requis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de D, où D est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.
Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
Tracer Γ.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

La courbe C représentative de f est donnée sur le document **annexe 1** que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe C

1) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

2) Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

4) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.

3) Soit D la droite d'équation $y = x$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1) Démontrer que si $x \in [0\,;4]$, alors $f(x) \in [0\,;4]$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Sur le graphique de l'annexe, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points de C d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

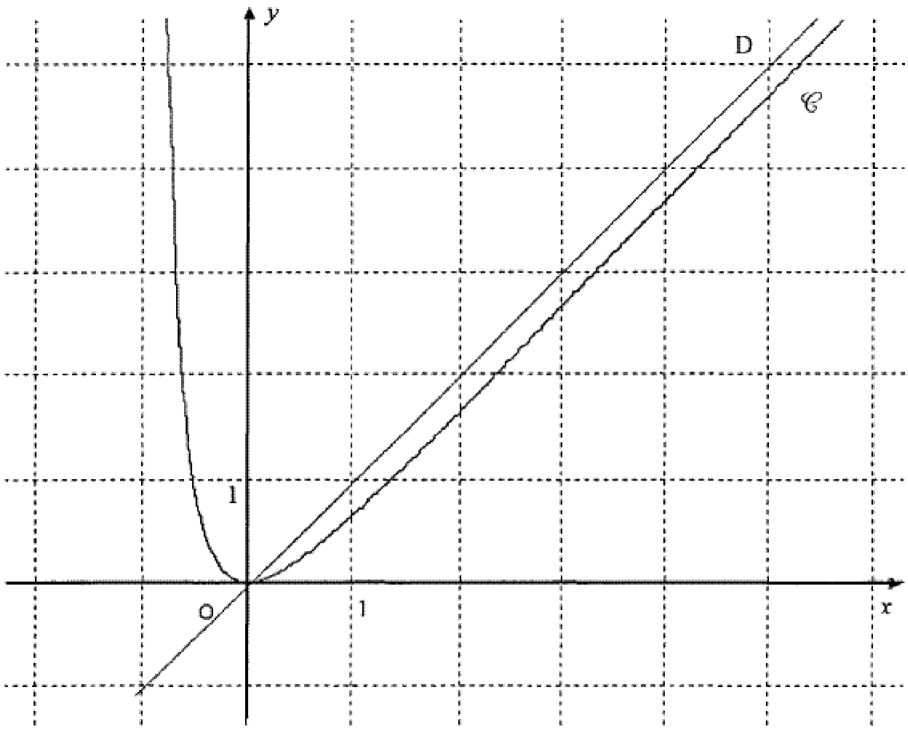
b) Démonter que pour tout n de $\mathbb{N}$ on $u_n \in [0\,;4]$.

c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

d) Démonter que de la suite (u_n) est convergente. On désigne par l sa limite.

e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de l.

Annexe 1



Sujet 28

EXERCICE 1

Pour tout nombre complexe z, on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$.

1.

a) Calculer $P(2)$. Justifier qu'il existe deux nombres réels ***a*** et ***b*** (à préciser) tels que : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On appellera z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 la solution de partie imaginaire strictement négative.

c) Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.

2. Placer, en expliquant la méthode utilisée, dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité 2cm) les points A d'affixe 2, B d'affixe z_1, C d'affixe z_2 et I milieu de [AB].

3. Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OI}})$.

4. Calculer l'affixe z_3 de I ; puis le module de z_3.

5. Déduire des deux questions précédentes la valeur exacte de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et de $\sin\frac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 2

Dans le tiroir de son armoire, Joël possède 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et deux paires de chaussettes rouges.
Ces chaussettes se trouvent mélangées dans le plus grand désordre.
Joël, pressé, prend, parfaitement au hasard, deux chaussettes dans le tiroir.

1.

a) Calculer, la probabilité pour que Joël ait pris deux chaussettes noires.

b) Calculer, la probabilité pour que Joël ait pris deux chaussettes de la même couleur.

2. On suppose que les nombres de chaussettes vertes et rouges restent inchangés. Déterminer le nombre *n* de chaussettes noires devant se trouver dans le tiroir pour que Joël prenne deux chaussettes noires avec une probabilité de $\frac{2}{7}$.

PROBLÈME

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). (Unités graphiques : 2 cm)

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = (3+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

1°) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$, puis en $+\infty$.

2°) Étudier les variations de f sur **R** et dresser son tableau de variations.

3°) Construire la courbe (Γ) représentative de f dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)..

4°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_{-3}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine définie par les couples (*x, y*) tels que $0 \le y \le f(x)$ et $x \le 0$.

5°)a) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans **R**. Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$.

b) Plus généralement, déterminer **<u>graphiquement</u>**, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur **R** par $\varphi(x) = 3e^{\frac{x}{2}-3}$.

1°) Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$.

2°) Soit φ' et φ'' les dérivées première et seconde de la fonction φ.

a) Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$.

b) Etudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.

On se place désormais dans l'intervalle $I = [-2; \alpha]$.

3°) Montrer que, pour tout x appartenant à I:

a) $\varphi(x)$ appartient à I.

b) $\frac{1}{2} \leq \varphi'(x) \leq \frac{3}{4}$.

c) En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x).$$

4°) On considère la suite (u_n) définie sur **R** par $u_o = -2$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

b) Justifier que, pour tout entier n,

$$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - u_n) \text{ puis que } 0 \leq \alpha - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier p tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_p à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2.10^{-2} près.

Sujet 29

EXERCICE 1

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.
— parmi les bien-portants, 2% ont un test positif.
— parmi les individus malades, 49 ont un test négatif.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

	Malades	Bien Portants	Total
Test Positif			
Test Négatif			
Total			30000

2. On choisit au hasard un individu de cette population. On considère les événements T et M
suivants
— T : « le test est positif pour l'individu choisi »
— M : «l'individu choisi est malade ».
a) Calculer la probabilité de chacun des événements T et M.
b) Définir par une phrase l'événement $\overline{T}$ et calculer sa probabilité.
c) Définir par une phrase chacun des événements $M \cup T$ et $\overline{M} \cap T$.
d) Calculer les probabilités des événements $M \cup T$ et $\overline{M} \cap T$.

3. On décide d'hospitaliser tous les individus qui ont un test positif. On choisit au hasard un individu hospitalisé. Quelle est la probabilité qu'il soit bien portant ?

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère ortho normal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Unité graphique 2 cm.

On appelle A le point d'affixe $-2i$.
À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -2z + 2i$.

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z + 2i$.

a) Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$.
b) Démontrer que $(z + 2i)\ (z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.
c) En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.
d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé à M.

PROBLÈME

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty;0] \cup]2;+\infty[$.
   En déduire les variations de f.
   Dresser le tableau de variation de f.
5. Calculer la limite de $f(x)-x$ en $+\infty$ et la limite de $f(x)+x$ en $-\infty$; interpréter graphiquement les résultats de ces calculs.
6. Construire la courbe représentative de f, ses asymptotes et ses tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

Sujet 30

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe : $z=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

1. **Écrire** z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=\sqrt{2}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 5 boules rouges et 7 boules noires, l'urne U_2 contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne U_1, que l'on place dans l'urne U_2.

On tire ensuite au hasard une boule de l'urne U_2.

1. Calculer la probabilité que la boule tirée de l'urne U_1 et celle tirée de l'urne U_2 soient toutes deux rouges.
2. Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur.
3. Calculer la probabilité que la boule tirée de l'urne U_2 soit rouge.
4. Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de l'urne U_1 soit rouge ?

PROBLÈME

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x-3+\frac{\ln x}{x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J) ; unité graphique 2cm.

PARTIE 1

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2x^2+1-\ln x$.

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation (on ne demande pas de calculer les limites de g).
2. Justifier que $\forall x\in\,]0;+\infty[,\quad g(x)>0$.

PARTIE 2

1.
   a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2.
   a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x-3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
   b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ).
3.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Étudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variations.

4.

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

b) Vérifier que : $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

5. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = 3x - 4$.

PARTIE 3

On pose $\varphi(x) = f(x) - (3x-4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1.

a) Donner le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

b) Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]0;1[, & h(x) > 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[, & h(x) < 0 \end{cases}$

2.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) Étudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

3. Tracer avec soin la courbe (C), la droite (Δ) et la tangente (T) dans le même repère.

PARTIE 4

1. Montrer que la fonction *K* définie par : $K(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction *k* définie par : $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. En déduire une primitive *F* de *f* sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer $F(e) - F(1)$.

Sujet 31

EXERCICE 1

On considère une droite D munie d'un repère $\left(O;\vec{i}\right)$.

Soit $\left(A_n\right)$ la suite de points de la droite D ainsi définie :

$$\begin{cases} A_o \text{ est le point } O; \\ A_1 \text{ est le point d'abscisse 1;} \\ \text{pour tout entier naturel , le point } A_{n+2} \text{ est le milieu du segment } \left[A_nA_{n+1}\right] \end{cases}$$

1. a) Placer sur un dessin la droite D, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
On prendra 10 cm comme unité graphique.
b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
Calculer a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6.
c) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit $\left(v_n\right)$ la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

Démontrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite $\left(v_n\right)$, puis celle de la suite $\left(a_n\right)$.

EXERCICE 2

Les deux parties **A** et **B** peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes : La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test). La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).
On fait passer un test `a une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1.
   a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)$.Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3.
   a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

PROBLÈME

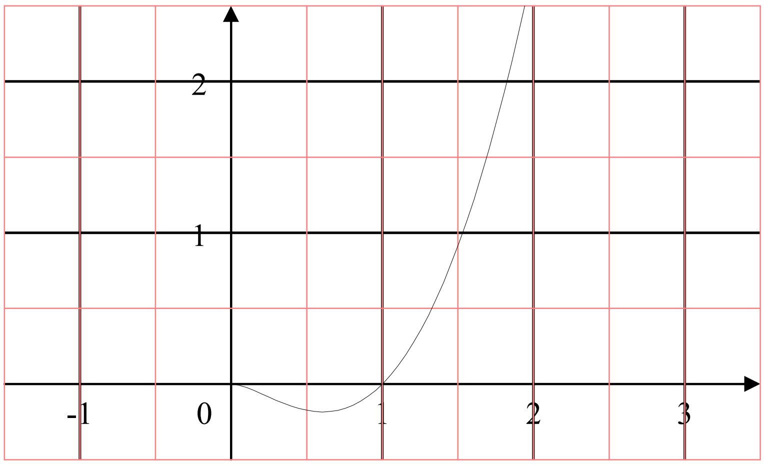
Partie A

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérives continues sur un intervalle [a; b], démontrer la formule d'intégration par parties.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

La courbe ($\mathbb{C}$) représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est donnée ci-dessous.



1.
   a) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de *f* sur $]0;+\infty[$.
2. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation. Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe ($\mathbb{C}$) passant par O. Préciser une équation de cette tangente.
3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe ($\mathbb{C}$), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.On note *V* une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que : $V = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \pi\left[f(x)\right]^2 dx$.
   a) Montrer qu'une primitive de la fonction $x \mapsto x^4 \ln x$ sur $]0;+\infty[$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$.
   b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $V = \frac{\pi}{125}\left(2 - \frac{37}{e^5}\right)$

Sujet 32

EXERCICE 1 **Terminale C**

Partie A

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux. Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0[p]$ et $a \equiv 0[q]$, alors $a \equiv 0[pq]$.

Partie B

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 9[17] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$

1. Recherche d'un élément de S

On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

   a) Justifier l'existence d'un tel couple (u, v).
   b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ .Démontrer que n_0 appartient à S.
   c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à S.

2. Caractérisation des éléments de S
   a) Soit n un entier relatif appartenant à S. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0[85]$.
   b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si n peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3. Application : Apo sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

EXERCICE 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe 2-5i et B le point d'affixe 7-3i.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que |z -i|=|z -2i|.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0;+\infty[$, $e^x-x>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur [0 ; 1].

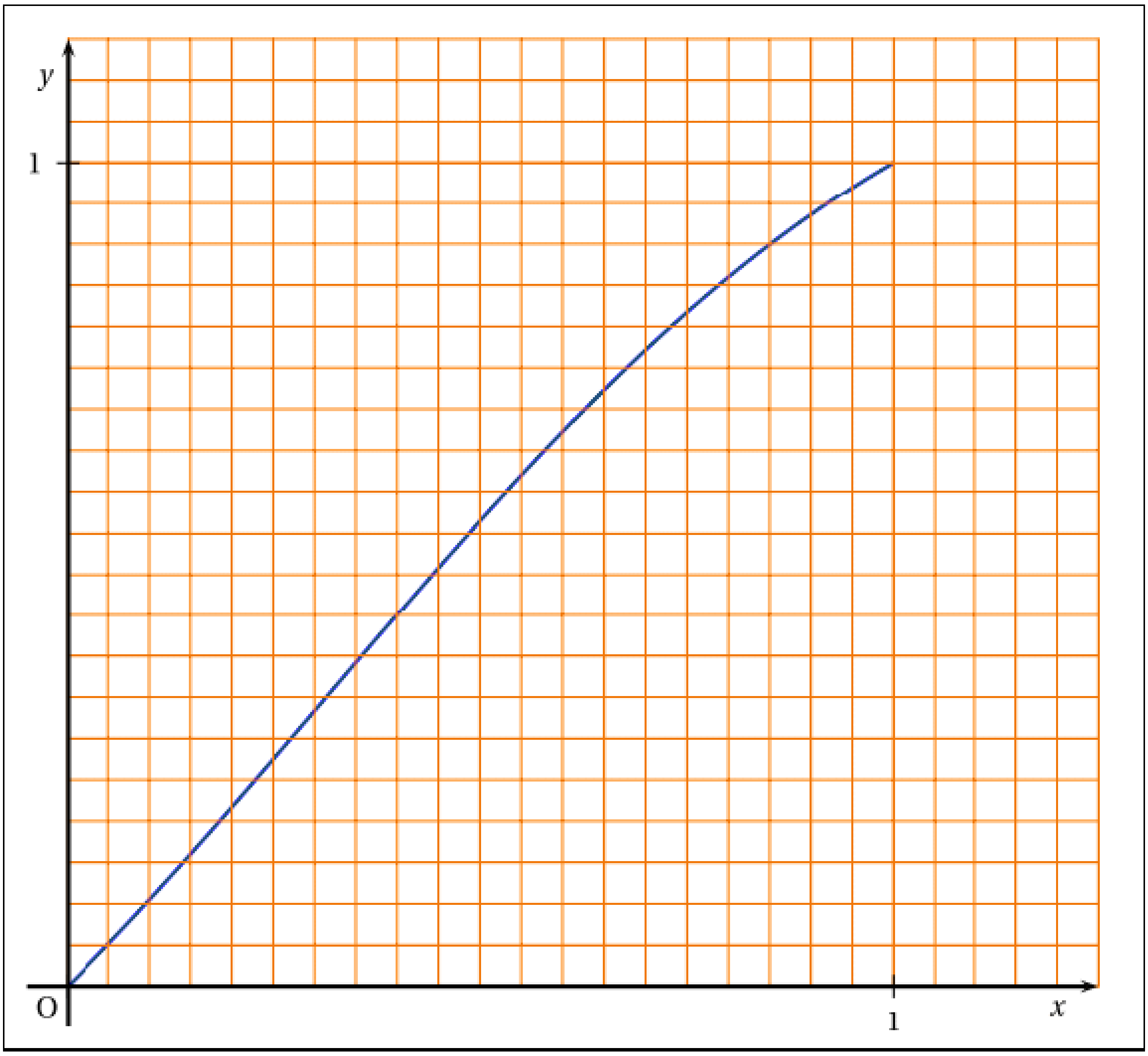
1. Montrer que pour tout x de [0 ; 1], $f(x)\in[0;1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y=x$.
    a) Montrer que pour tout x de [0 ; 1], $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.
    b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur [0 ; 1].
3.
    a) Déterminer une primitive de f sur [0 ; 1].
    b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}\le u_n\le u_{n+1}\le 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Annexe



Sujet 33

EXERCICE 1

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

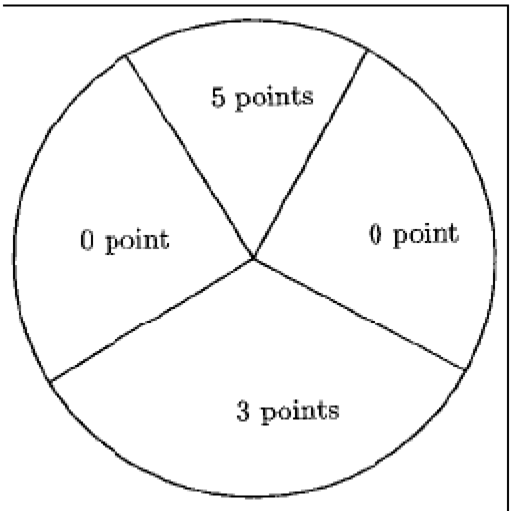
- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :
G_n l'événement « le joueur gagne la n[ième] partie " ;
p_n la probabilité de l'événement G_n.
On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n).
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2} p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'événement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'événement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'événement : « le joueur perd la partie ».

a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$

b) En déduire $p(P)$.

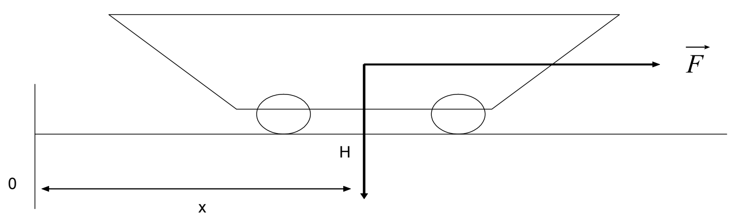
3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
4. Pour une partie, la mise est fixée à 1200 FCFA.

Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 3000 FCFA. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 1800 FCFA. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
b) Donner la loi de probabilité de X.
c) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

PROBLÈME

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.



La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H ? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle [0 ; +∞[.

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement :

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200\,x'' = 50$$

où x'est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.

Résoudre l'équation différentielle (F).

2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

(a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

(b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16\,e^{-t/8}$.

3. Calculer $V = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite V ?

4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Sujet 34

EXERCICE 1

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2.
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5.
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6.
   a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1[17]$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

EXERCICE 2

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances. On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

   a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
   b) Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d) En déduire les solutions de (E).

e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

PROBLÈME

Sujet 35

EXERCICE 1

Partie A

On considère l'équation (E) $z^3 - (4+i)\,z^2 + (13+4i)\,z - 13i = 0$ où z est un nombre complexe.

1) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3 - (4+i)\,z^2 + (13+4i)\,z - 13i = (z - i)\,(az^2 + bz + c)$.

3) en déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, 2 + 3i et 2 - 3i.

1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par la rotation r.

2) Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

EXERCICE 1

1) Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle [a ; b].

2) Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

PROBLÈME

Sujet 36

EXERCICE 1

Partie A: Question de cours

Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans **Z** le système

$$(S)\ \begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ \ (12) \end{cases}$$

Démontrer qu'il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que :19 u+ 12 v=1. (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple). Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12\, v + 6 \times 19\, u$ est une solution de *(S)*.

a. Soit n_0 une solution de *(S),* vérifier que le système *(S)* équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ \ (12) \end{cases}$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ \ (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\ (12\times19)$.

3. a. Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12\, v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
b. Déterminer l'ensemble des solutions de *(S)* (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 1

Dans l'ensemble C des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
   (a) Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).
   (b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8i$.
4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
5. (a) Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.
   (b) Montrer que b et c sont solutions de (E').

PROBLÈME

Sujet 37

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel} \quad n. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

(b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 1

PROBLÈME