Département de Mathématiques		Classe : T^{le} C
Devoir surveillé N° 4	Epreuve de Mathématiques	
Février 2022	Durée : 4h	Cœff. : 7

EVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 Points

Exercice 1 5 points

On considère un carré direct ABCD de centre I. Soient J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD] et$ $[DA]$.
(Γ_1) désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et (Γ_2) le cercle de diamètre $[BK]$.

I. 1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$. **0,5pt**

2) Démontrer que le centre Ω de la similitude s est un point de (Γ_1) et de (Γ_2) autre que J. **0,5pt**

3-a) Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). **0,5pt**

En déduire l'image du point C par s. **0,5pt**

4-a) Déterminer l'image de A par $s \circ s$. **0,25pt**

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s \circ s$. **0,5pt**

c) En déduire que les points $A, \Omega,$ et E sont alignés. **0,25pt**

II. Dans la suite, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points I et K. **0,5pt**
2. Démontrer que la similitude s a pour écriture complexe : $z' = \frac{i}{2}z + 5 + 5i$. **0,5pt**
3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s. **0,25pt**
4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E. **0,5pt**

Exercice 3 4 points

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit f l'endomorphisme de E qui, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$.

1. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$. **0,75pt**
2. a) Déterminer le noyau $kerf$. **0,75pt**

   b) f est-elle un automorphisme ? Justifier votre réponse. **0,5pt**

   c) Déterminer l'image de f noté imf. **0,75pt**
3. On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{k}$.

   a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E. **0,5pt**

   b) Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. **0,75pt**

Exercice 4 6 points

I. On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

1. a) Calculer la limite de g en $+\infty$. **0,25pt**

   b) Soit $x \in]1; +\infty[$; on pose $t = 1 + x$. Vérifier que $g(x) = \frac{t-1}{t}\left(\frac{t\ln t}{t-1} - 1\right)$ puis calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x)$. **0,5pt**
2. Etudier les variations de g puis en déduire que $g(x) \geq 0$ $\forall x \in]-1; +\infty[$. **0,75pt**

II. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x\neq -1 \text{ et } x\neq 0 \\ f(-1)=0 \text{ et } f(0)=1 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le pan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier la continuité de f en 0 et à droite en -1. **0,5pt**

2. a) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en -1. **0,25pt**

b) Vérifier que pour tout réel $x\in\left]-1;+\infty\right[\setminus\{0\};\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x}{\ln(1+x)}\left[\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{g(x)}{x^2}\right]$. **0,25pt**

c) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ puis donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. **0,5pt**

3. a) Montrer que pour tout réel $x\in\left]-1;+\infty\right[\setminus\{0\};f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left[\ln(1+x)\right]^2}$. **0,25pt**

b) Dresser le tableau de variation de f. **0,5pt**

4. Soit h la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{2x}{2+x}-\ln(1+x)$.

a) Etudier le sens de variation de h. **0,5pt**

b) En remarquant que $h(0)=0$, donner le signe de h sur $]-1;+\infty[$. **0,25pt**

c) Vérifier que pour tout réel $x>-1;f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)=\dfrac{(x+2)h(x)}{2\ln(x+1)}$ puis en déduire la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la tangente (T). **0,5pt**

5. Tracer $(\mathcal{C})$ et (T). **0,75pt**

<u>EVALUATION DES COMPETENCES</u> 4,5 Points

EBANDA est un ingénieur agronome, pour mener ses recherches sur la culture du maïs, il souhaite louer un terrain d'expérimentation d'aire comprise entre 3 et 4 hectares. Un terrain lui a alors été proposé et les données fournies par le géomètre décrivent ce terrain comme ayant la forme d'un quadrilatère particulier dont les affixes des sommets dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (unité : 2 cm), sont les racines quatrièmes de $\mathbf{-4}$. ***Echelle :*** $\mathbf{\frac{1}{7\,500}}$.

Ses premières recherches sur la culture du maïs après l'acquisition du terrain lui ont permis de modéliser la croissance d'un plan de maïs par la fonction f définie par $f(t)=\dfrac{2}{1+19e^{-0,04t}}$ où $f(t)$ désigne la hauteur du plan en mètre et t le temps en jours avec $0\leq t\leq 250$.

Il a conservé sa première récolte de maïs issue de son champ d'expérimentation dans un entrepôt ayant la forme d'un cube ABCDEFGH de côté 1 dam. Il a constaté que le maïs occupait un volume ayant la forme d'un tétraèdre ABIG où I est le milieu de $[EF]$. Le prix d'un sac de maïs de 100 l est de 23 000 $FCFA$.

Tâches :

1. Le terrain qui a été proposé à EBANDA répond-t-il à ses attentes ? **1,5pt**
2. Quel est le temps nécessaire (au jour près) pour que le plan de maïs atteigne une hauteur d'au moins 1,5 m ? **1,5pt**
3. Quelle recette réalisera EBANDA sil vend toute sa récolte de maïs ? **1,5pt**