EVALUATION DE LA 1ère SEQUENCE		
Lycée de MAKEPE		*Classe : TC*
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES		*Mercredi, 02 Octobre 2019*
Epreuve de Mathématiques		*Durée : 3h30 min Cœf. : 5*

L'épreuve comporte quatre exercices. Le candidat devra traiter obligatoirement les quatre exercices

EXERCICE I **5 points**

Les questions 1°/ , 2°/ et 3°/ sont indépendantes

1. Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$

a) Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du second degré à coefficients entiers relatifs **0,75pt**

b) Déduire que si la base du système de numération est au moins égale à cinq, le nombre 10304 est divisible par 112. **0,75pt**

c) En base sept, exprimer le quotient de la division de 10304 par 112. **0,5pt**

2. Soit x, y, z trois entiers naturels. On suppose que, dans le système de numération de base x, les nombres y et z s'écrivent respectivement 131 et 101.

a) Montrer que, sans connaitre x, on peut exprimer le produit xyz dans le système à base x. **0,75pt**

b) On sait, en outre, que dans le système décimal, $x + y + z = 50$.

c) Déterminer, dans le système décimal, le nombre x et le produit xyz. **0,75pt**

3. Déterminer les entiers naturels n pour que : $5^{2^n+4} - 1$ soit divisible par 7. **1,5pt**

EXERCICE II **5 points**

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \times 6 \times \cdots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \times \cdots \times 2n$ **0,75pt**

2. a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(2k-1) = (-1)^{n-1} n$ **0,75pt**

b) En déduire la somme $S = 29 - 31 + 33 - 35 + \cdots + 61$ **0,5pt**

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \dfrac{\left[(2n)!\right]^2}{(n!)^2}$

a) Calculer P_1 et P_2 **0,5pt**

b) Montrer $P_{n+1} = 4(2n+1)^2 P_n$ **0,5pt**

c) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$, $P_n = 2^{2n} \times 3^2 \times 5^2 \times \cdots \times (2n-1)^2$ **0,5pt**

4. On considère un entier naturel d'écriture den base décimale $A_n = \overbrace{333\cdots35}^{n \text{ chiffres}}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \dfrac{10^n + 5}{3}$ **0,75pt**

b) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de A_n par 7 **0,75pt**

EXERCICE III **5 points**

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$; $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{ax^n - xa^n}{x-a}$; $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; $(a > 0)$ **1,5pt**

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (t_n) par $t_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$

a) Calculer t_1 ; t_2 et t_3 **0 ,75pt**

b) Montrer que $t_{n+1}-t_n=\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}-\frac{2}{\sqrt{2n+4}}\right)$

0,75pt

c) En déduire que la suite (t_n) est strictement croissante. **0,5pt**

d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}}\le t_n\le\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$: **1pt**

e) En déduire que (t_n) est convergente (on pourra prouver que (t_n) est majorée par 1). **0,5pt**

<u>Exercice IV</u> 5 points

1. PQR est un triangle rectangle en P tel que $PR = 2PQ = 2r$ ($r\in\mathbb{R}_+^*$)

Soit G_1 le barycentre du système $\{(P,1);\ (Q,2);\ (R,1)\}$ et G_2 celui de $\{(P,5);\ (Q,2);\ (R,-3)\}$

a) Construire G_1 et G_2 puis calculer G_1G_2. **1pt**

b) Soit (Γ_k) l'ensemble des points M du plan tels que : $MP^2+2MQ^2+MR^2=4k$, k un réel.

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel k, la nature de $((\Gamma_k)$ puis construire $\left(\Gamma_{\frac{3}{2}r^2}\right)$ **1pt**

c) On suppose maintenant que P, Q et R sont des points de l'espace. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MQ}-3\overrightarrow{MR}\right\|$ **0,5pt**

2. On considère un triangle isocèle ABC de côtés $BC = 2a$; $AC = AB = 3a$; $a\in\mathbb{R}^*_+$. On note A' une le milieu de [BC] et H l'orthocentre du triangle ABC.

a) Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que $\cos\theta=\frac{7}{9}$ **0,75pt**

b) Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Calculer $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$ puis en déduire deux nombres réels α et γ tels que B' soit le barycentre du système $\{(A,\alpha);\ (C,\gamma)\}$ **0,75pt**

c) En s'inspirant de ce qui précède, déterminer trois nombres réels a, b et c tels que le point H soit le barycentre du système $\{(A,a);\ (B,b);\ (C,c)\}$ **1pt**