MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES / DRES LITTTORAL / DDES WOURI			
EVALUATION HARMONISEE N°4	**ANNEE SCOLAIRE 2019 / 2020**		**BASSIN DOULA V^e**
Epreuve : MATHEMATIQUES	**Classe : T^{le}C**	**Coefficient : 6**	**Durée : 4 HEURES**

<u>Exercice 1</u> (4 points)

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 9x+5y=1$

a) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E), alors $x^2 \equiv 1[5]$. **0,5pt**

b) Donner une solution particulière de (E), puis résoudre l'équation (E). **0,75pt**

c) En déduire les solutions du système $(S)\begin{cases} 9x+5y=1 \\ x \equiv y[3] \end{cases}$ **0,5pt**

2. Soit N un entier tel qu'il existe un couple d'entiers $(a;b)$ vérifiant: $\begin{cases} N=9a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple $(a;\ -b)$ est une solution de (E). **0,5pt**

b) Pour tout entier m, montrer l'équivalence $\begin{cases} m \equiv 1[9] \\ m \equiv 2[5] \end{cases}$ si et seulement si $m \equiv 37[45]$. **0,5pt**

c) Trouver alors le reste de la division euclidienne de N par 45. **0,5pt**

3. Pour rembourser les frais mensuels de transport de ses employés (cadres et ouvriers), une entreprise a dépensé une somme de 1 000 000 $FCFA$.
Sachant que les cadres ont reçu 90 000 FCFA chacun et les ouvriers 50 000 FCFA chacun, combien pouvait-il y avoir de cadres et d'ouvriers dans cette entreprise ? **0,75pt**

<u>Exercice 2</u> (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O le milieu de $[AC]$. On désigne par I le milieu de [OB] et par D l'image de O par la symétrie orthogonale d'axe (BC).

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(O)=D$. **0,25pt**

b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ **0,5pt**

c) Soit $K = f(I)$. Montrer que K est le milieu de $[BD]$. **0,5pt**

2. On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$

a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ **0,5pt**

b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$ **0,25pt**

3. On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[BD]$.

a) Déterminer $h(B)$ et $h(D)$. **0,5pt**

b) Montrer que h est la symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$. **0,5pt**

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $h(M) = f(M)$. **0,5pt**

5. Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$ **0,5pt**

<u>Exercice 3</u> (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct } $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,0,0), B(0,0,1)\ et\ C(1,-1,1)$.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+y+z-1=0$. **0,5pt**

2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R. **0,5pt**

b) Montrer que $(S) \cap (ABC)$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. **0,5pt**

3. a) Montrer que les points A, B, C et I ne sont pas coplanaires. **0,5pt**
b) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$. **0,5pt**
c) Soit a un réel et soit $M(a, 0, 2-a)$ un point de l'espace. Montrer que, lorsque a décrit $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre $MABC$ reste constant. **0,5pt**

<u>Problème</u> (9 points)

<u>Partie A</u> (3 points)

Soit $\theta \in [0;\ 2\pi]$ et E_θ l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 9 - 8\cos^2\theta = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_θ. **0,75pt**

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de E_θ.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, les points M_1 et M_2 décrivent l'ellipse (Γ) d'équation $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **0,5pt**

b) Déterminer l'excentricité de (Γ) ainsi que les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. **0,75pt**

c) Tracer (Γ). **0,5pt**

3. Soit M un point de (Γ) et A le point de coordonnées $(1; 0)$. Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1), (M, 2)\}$.
Montrer que lorsque M décrit (Γ), G décrit une ellipse (Γ') que l'on caractérisera. **0,5pt**

<u>Partie B</u> (6 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = 2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **1pt**

2. Calculer $g(1)$ et donner le signe de g.

II. Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et que $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$. **0,5pt**

2. Dresser le tableau de variations de f. **0,5pt**

3. Montrer que la droite $(D): y = -x + 1$ est une asymptote à (C). **0,25pt**

4. Tracer la courbe (C) et la droite (D). **0,75pt**

5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. **0,5pt**

III. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln t)^n}{\sqrt{t}}\, dt$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1) I_n$ **0,75pt**

2. Calculer I_2. (On pourra utiliser le résultat de la question II-5)) **0,5pt**

3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. **0,5pt**

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le I_n \le \dfrac{\sqrt{e}}{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. **0,75pt**