



Exercice 1 :

- Donner l'ensemble D des diviseurs positifs de 97.
- Soit p un entier naturel tel que $0 < p < 97$.
 - Montrer que $97C_{96}^{p-1} = pC_{97}^p$.
 - En déduire que $pC_{97}^p \equiv 0[97]$.
 - Déduire que pour tout couple (a, b) d'entiers naturels $(a, b) : (a+b)^{97} \equiv a^{97} + b^{97} [97]$.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n : n^{97} \equiv n[97]$.
- Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \times m \equiv 1[97]$.
 Montrer que : $n^{96} \equiv 1[97]$ et $m^{96} \equiv 1[97]$.

Exercice 2 :

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $g(x) = (x+2)e^{-x}$.

Soit (Cg) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Unité graphique sur les axes : 2 cm.

- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
 - Préciser l'asymptote et la branche parabolique à la courbe (Cg) .
 - Tracer la courbe (Cg) .
- Soit (Δ) le domaine plan limité par les droites d'équations $x = -2$; $x = 0$; $y = 0$, la courbe (Cg) et la droite (D) d'équation $y = 2x + 4$.
 - Calculer les coordonnées des points d'intersection de (D) et de (Cg) .
 - Calculer l'aire de (Δ) .
- Soit $ABCD$ un carré direct du plan de centre I et de côté a , s la similitude directe de centre A qui transforme C en B .
 - Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s .
 - Montrer que I est l'image de D par s .
 - En déduire l'aire de $s(\Delta)$, l'image de (Δ) par s .

Problème :

Partie A :

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif.
 Montrer par récurrence que : $(1+nx) \leq (1+x)^n$.
- On dispose de n boules numérotés de 1 à n . On les place toutes au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n , chaque boîte pouvant contenir de zéro à n boules.
 Calculer la probabilité P_n pour que chaque boîte contienne exactement 1 boule.
- On pose $P_n = \frac{n!}{n^n}$, où $n!$ désigne « factoriel n ».

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $\frac{P_n}{P_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire l'inégalité : $P_n \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

(c) Calculer la limite de la suite (P_n) quand n tend vers $+\infty$.

Partie B :

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$. g l'endomorphisme de E_2 qui à un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u}' = (x + \frac{1}{2}y)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$.

1. (a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijective.

(b) Déterminer le noyau Kerg et l'image $\text{Im}g$ de g .

(c) En déduire que $\text{Kerg} = \text{Im}g$.

2. Soit $\vec{v}$ un vecteur de Kerg .

Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.

3. Soient $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de coordonnées respectives $(-1; 2)$ et $(-1; 1)$.

(a) Montrer que $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E_2 .

(b) Donner la matrice de g dans la base B' .

Partie C :

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit les trois points $A(1; 0)$; $B(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ et $C(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ et la droite $(\mathcal{D})$ dont une équation est $x = 1$.

1. (a) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.

(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?

2. On note (Γ) l'ensemble des points M de (P) , de coordonnées $(x; y)$, qui vérifie la relation :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2.$$

(a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ) .

(b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de (P) tels que : $MG = a\sqrt{2}$, où a désigne la distance du point M à la droite $(\mathcal{D})$.

(c) En déduire la nature de (Γ) et préciser son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée.

3. Représenter (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'école n'est pas le piège... « Que l'inspiration vous étouffe »