الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: رياضيات

دورة: 2020

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرّفة على المجال $[1;4]$ بـ: $f(x)=\frac{4x+4}{9-x}$.

1) أ . ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1;4]$.

ب. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإن: $f(x)\in[1;4]$.

2) المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<4$.

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-4}$.

أ . برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

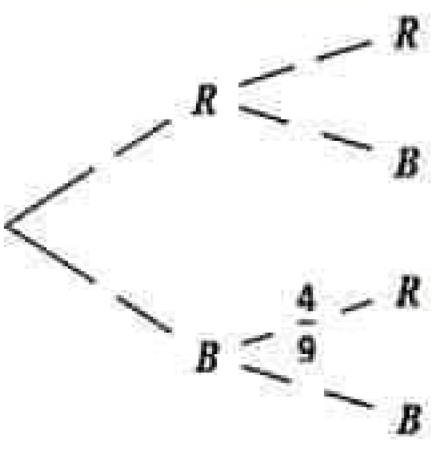
ب. عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

4) المجموع S_n معرف بـ : $S_n=v_0+8v_1+8^2v_2+...+8^nv_n$. احسب S_n بدلالة n.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نُعيدها إلى الصندوق ونُضيف له كرية بيضاء وإذا ظهرت كرية بيضاء نُعيدها إلى الصندوق ونُضيف له كرية حمراء، ثم نكرّر العملية مرّة ثانية.



1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تُنمذج هذه التجربة ثم أكملها.

2) بيّن أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

3) احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ . برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و 7.

ب. عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث : $a=4n+1$ ، $b=6n+1$ و $c=3n+2$.

1) أثبت أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما.

2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c .

أثبت أنّ α يقسم 5 ، ثمّ عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha=5$.

3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc .

أ . اثبت أنّ α يقسم β .

ب. أثبت أنّ العددين β و b أوليان فيما بينهما ثمّ استنتج أنّ: $\alpha=\beta$.

4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث: $A=4n^2-3n-1$ و $B=18n^3-3n^2-13n-2$.

أ . بيّن أنّ كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.

ب. نضع: $d=PGCD(A;B)$. عبّر حسب قيم α عن d بدلالة n. (لاحظ أنّ: $bc=18n^2+15n+2$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالتان العدديتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $g(x)=-2e^x$ و $h(x)=x(e^x+1)$.

حدّد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) الدالة العددية f معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $f(x)=(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ . بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=h(x)+g(x)$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

2) احسب $f(0)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;0]$ ثمّ تحقّق أنّ: $-1.5<\alpha<-1.4$.

4) (P) هو التمثيل البياني للدالة: $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty;0]$.

أ . احسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C_f).

جـ. أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

5) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $|f(x)|=e^m$ في $]-\infty;0]$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل المعادلة: $3x-5y=2$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.

ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.

3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14\times 4^n+11\times 9^n-4\equiv 0[77]$.

4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $u_n=3\times 4^n+4\times 9^n$ و $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_{15n}$

أ. عبّر عن S_n بدلالة n.

ب. أثبت أنّ S_n مضاعف للعدد 77.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n\geq 2$)

و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق.

1) أ. احسب احتمال كل من A و B حيث:

A : "سحب كريتين من نفس اللون" و B: "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون"

ب. عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون: $P(A)=\frac{17}{55}$.

2) نفرض في ما يلي: $n=5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين .

نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد: $\cos(\alpha)\cos(\beta)$

أ. برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي: $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1.

ب. بيّن أنّ: $P(X=0)=\frac{27}{55}$.

جـ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases}u_0=-1\\ u_{n+1}=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}v_0=3\\ v_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n\end{cases}$$

(α عدد حقيقي)

المتتالية العددية (w_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=v_n-u_n$

1) أ . احسب w_0 ثمّ احسب w_1 بدلالة α.

ب. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.

جـ. اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثمّ عيّن قيم α حتّى تكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

نفرض في كلّ ما يلي: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

2) أ . أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أنّ (v_n) متناقصة تماما.

ب. استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n + v_n = 2$ ، واستنتج قيمة ℓ.

4) احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)$.

ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ . احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.

جـ. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.

أ . بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$

جـ. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (نأخذ $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 0,8$)

3) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ ثمّ تحقّق أنّ: $2.83 < \alpha < 2.84$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

جـ. حدّد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و المنحنى (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

4) نعتبر الدالة k المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $k(x) = \ln(6x)$ و ليكن (γ) منحنيها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ (γ) هو صورة منحني الدالة: $x \mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - k(x)\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

5) أ . بيّن الدالة f فردية.

ب. انشئ كلا من (Δ) ، (γ) و (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج انشاء المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

انتهى الموضوع الثاني