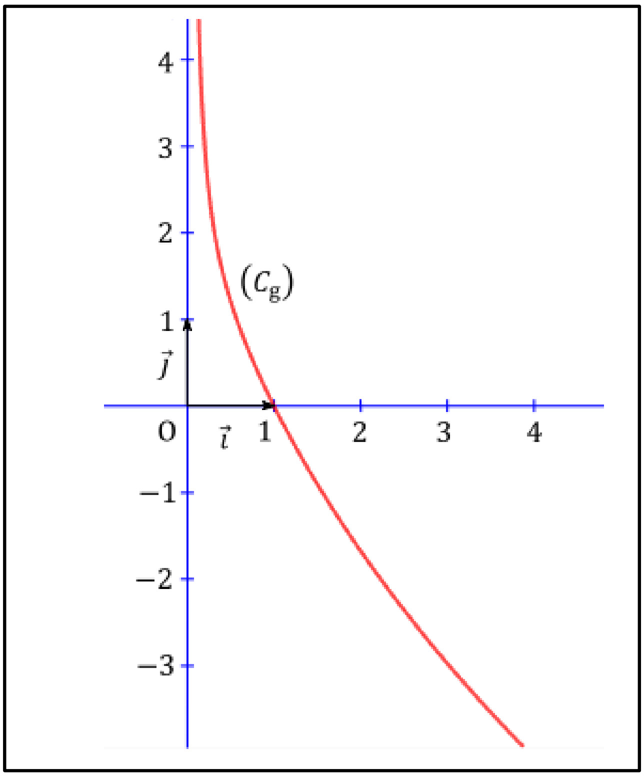
دورة 2018 – شعبة العلوم التجريبية – الموضوع الثاني

المسألة

I- g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$$

و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل:



- أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بين أنه من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) بين أن:

$$y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$$

هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.

ثم ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

4) عين بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين.

III- n عدد طبيعي حيث $n>1$، و I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$:

$$I_n=\ln(1+n\ln n)$$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (I_n).

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

الحل

I- g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$$

حساب $g(1)$:

نعوض x بـ 1 في عبارة الدالة g فنجد:

$$g(1)=0$$

استنتاج بيانيا إشارة $g(x)$:

من المنحنى البياني (C_g) الممثل للدالة g نلاحظ أن:

- الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0\,;+\infty[$.
- الدالة g تنعدم عند 1 (الدالة g تغير إشارتها).

$$\begin{cases} g(x)\geq 0 \;;\; 0<x\leq 1 \\ g(x)<0 \;;\; x>1 \end{cases}$$

ومنه:

نستنتج إشارة $g(x)$ كما هو موضح في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	−	

II- f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$$

1) حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \ln x=-\infty \\ \text{و} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} x\ln x=0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=-\infty$$

تفسير النتيجة بيانيا:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $-\infty$ حامل محور التراتيب مستقيما مقاربا له و $x=0$ معادلة له.

البرهان أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}+x\right)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

تفسير النتيجة بيانيا:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $+\infty$ حامل محور الفواصل مستقيما مقاربا له و $y=0$ معادلة له.

2) أ- البرهان أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(1+\ln x)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-\left(1+(\ln x)^2+2\ln x\right)}{(1+x\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-1-(\ln x)^2-2\ln x}{(1+x\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\,ln\,x)^2}$$

2) ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$.

حسب $(\mathbf{I})$:

نستنتج إشارة $f'(x)$ كما هو موضح في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه:

- الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0\,;1]$.
- الدالة f متناقصة تماما على المجال $[1\,;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(1)=1$	$\searrow$	0

3) البرهان أن معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل هي:

$$y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$$

لتعيين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، نحل من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$ المعادلة:

$$f(x)=0$$

لدينا:

$$f(x)=0\ ;\ x>0$$
$$1+ln\,x=0\ ;\ x>0$$
$$ln\,x=-1\ ;\ x>0$$
$$ln\,x=ln\,e^{-1}\ ;\ x>0$$

نجد:

$$x=e^{-1}>0$$

ومنه:

المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(e^{-1}\,;0)$.

تعطى معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة e^{-1} بالعلاقة:

$$(T):y=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(e^{-1})=\dfrac{e-1}{(1-e^{-1})^2}=\dfrac{e^2(e-1)}{(e-1)^2}=\dfrac{e^2}{e-1} \\ \text{و} \\ f(e^{-1})=0 \end{cases}$$

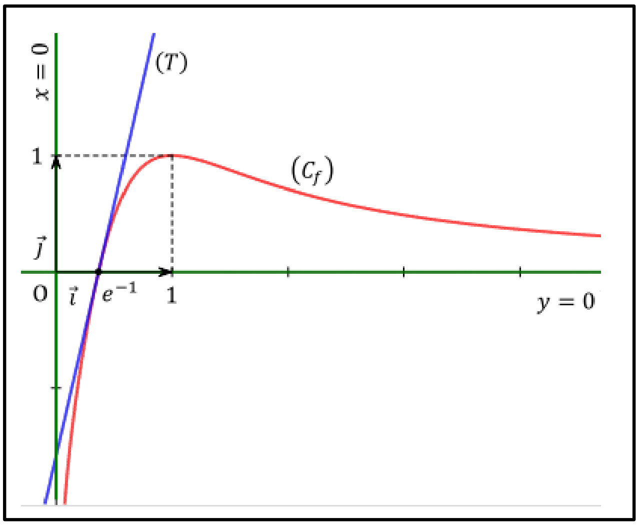
بالتعويض:

$$(T):y=\frac{e^2}{e-1}(x-e^{-1})$$

ومنه:

$$(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$$

رسم المماس (T) والمنحنى (C_f):



4) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين:

لدينا:

$$(e-1)f(x)=e^2x-me$$

$$f(x)=\frac{e^2x-me}{e-1}$$

$$f(x)=\frac{e^2x}{e-1}-\frac{me}{e-1}$$

ونكتب:

$$f(x)=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\left(\frac{e}{e-1}\right)m\ ...(*)$$

التفسير البياني:

الحلول البيانية للمعادلة $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيمات (T_m) المعرفة بالمعادلة:

$$(T_m):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\left(\frac{e}{e-1}\right)m$$

ملاحظات:

- جميع المستقيمات (T_m) توازي المماس (T) لأن لهما نفس معامل التوجيه $\left(\frac{e^2}{e-1}\right)$.
- النقطة $\left(0\,;\frac{-em}{e-1}\right)$ هي نقطة تقاطع المستقيمات (T_m) مع حامل محور التراتيب.

وبالتالي المناقشة البيانية مائلة.

- حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلين متمايزين يجب أن يقطع المستقيم (T_m) المنحنى (C_f) في نقطتين.

من المنحنى البياني:

نلاحظ:

$$-\left(\frac{e}{e-1}\right)m<-\left(\frac{e}{e-1}\right)$$

أي:

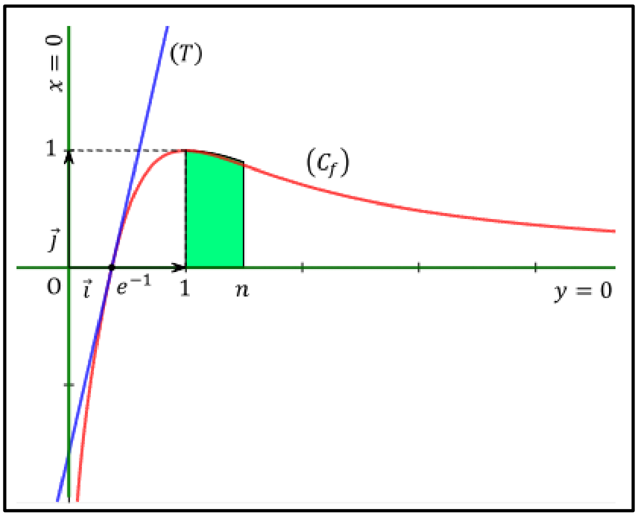
$$m>1$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $]1\,;+\infty[$: يكون للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين.

III- n عدد طبيعي حيث $n>1$، و I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

لاحظ الشكل التالي:



1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$:

$$I_n=ln(1+n\,ln\,n)$$

لدينا:

$$I_n=\int_1^n (f(x)-y)dx$$

$$I_n=\int_1^n \frac{1+ln\,x}{1+x\,ln\,x}dx$$

نضع:

$$u(x)=1+x\,ln\,x$$

ومنه:

$$u'(x)=1+ln\,x$$

فنكتب:

$$I_n=\int_1^n \frac{1+ln\,x}{1+x\,ln\,x}dx$$

$$I_n=\int_1^n \frac{u'(x)}{u(x)}dx$$

$$I_n=\Big[\,ln\,u(x)\Big]_1^n$$

$$I_n=\Big[\,ln(1+x\,ln\,x)\Big]_1^n$$

$$I_n=ln(1+n\,ln\,n)-ln(1+1\,ln\,1)$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

ومنه:

$$I_n = ln(1 + n\,ln\,n)$$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) ندرس إشارة الفرق $I_{n+1} - I_n$.

لدينا:

$$I_{n+1} - I_n = ln(1 + (n+1)\,ln(n+1)) - ln(1 + n\,ln\,n)$$

$$I_{n+1} - I_n = ln\left(\frac{1 + (n+1)\,ln(n+1)}{1 + n\,ln\,n}\right)$$

لدينا:

من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$:

$$1 + (n+1)\,ln(n+1) > 1 + n\,ln\,n$$

أي:

$$I_{n+1} - I_n > 0$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$:

المتتالية (I_n) متزايدة تماما

تعلم الرياضيات