دورة 2018 – شعبة التقني رياضي – الموضوع الثاني

المسألة

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0\,;1[$ بـ :

$$g(x) = 2 - x + \ln x$$

1) أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0\,;1[$.

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$0{,}15 < \alpha < 0{,}16$$

2) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;1[$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1\,;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أحسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = \frac{1-2x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$).

فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

ب- بين أن f متزايدة تماما على $\left]1\,;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -2$.

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f).

(يعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \simeq -1{,}8$)

5) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متمايزين.

الحل

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0\,;1[$ بـ :

$$g(x) = 2 - x + \ln x$$

1) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0\,;1[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;1[$، ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{-x+1}{x}$$

ونكتب:

$$g'(x) = \frac{1-x}{x}$$

لدينا:

من أجل كل x من المجال $]0\,;1[$:

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ \text{و} \\ x > 0 \end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل x من المجال $]0\,;1[$:

$$g'(x) > 0$$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;1[$.

1) ب- تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$0{,}15 < \alpha < 0{,}16$$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0\,;1[$ (I- أ)، فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0{,}15\,;0{,}16]$.

ولدينا:

$$g(0{,}15) = -\,0{,}047\ldots$$
$$g(0{,}16) = +\,0{,}007\ldots$$

لاحظ أن:

$$g(0{,}15) \times g(0{,}16) < 0$$

أي:

$$g(0{,}15) < 0 < g(0{,}16)$$

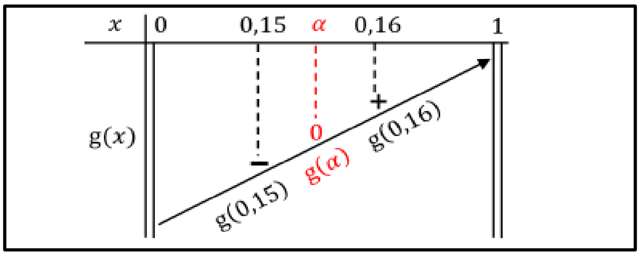
ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0{,}15\,;0{,}16]$ بحيث $g(\alpha) = 0$.

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

2) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;1[$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0\,;1[$ (I- أ)، وتقبل حلا وحيدا α على المجال $[0{,}15\,;0{,}16]$ بحيث $g(\alpha)=0$ (I- ب)، كما يظهر في الشكل التالي:



نستنتج إشارة $g(x)$ في الجدول التالي:

x	0		α		1
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1\,;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$

1) حساب $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

حساب: $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^{>}} f(x)=\lim_{x\to 1^{>}}\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^{>}}\left[\frac{1}{x-1}(1-2x+\ln x)\right]$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^{>}}\dfrac{1}{x-1}=+\infty\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to 1^{>}}(1-2x+\ln x)=-1\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 1^{>}} f(x)=-\infty$$

تفسير النتيجة بيانيا:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $-\infty$ مستقيما مقاربا عموديا (يوازي حامل محور التراتيب) معادلته: $x=1$.

حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x}{x-1}+\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{x-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{x-1}=-2\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$$

تفسير النتيجة بيانيا:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بجوار $+\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا (يوازي حامل محور الفواصل) معادلته: $y=-2$.

2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1\,;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{\left(-2+\frac{1}{x}\right)(x-1)-(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{-2x+2+1-\frac{1}{x}-1+2x-\ln x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

2) ب- تبيان أن f متزايدة تماما على المجال $\left]1\,;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ على المجال $]1\,;+\infty[$.

نستعين بالجواب I- 2) لتحديد إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

لدينا:

الدالة $g(x)$ تنعدم من أجل:

$$x=\alpha$$

ومنه:

الدالة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ تنعدم من أجل:

$$\frac{1}{x}=\alpha$$

أي:

$$x=\frac{1}{\alpha}$$

ولدينا حسب جدول إشارة $g(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;\alpha]$: $g(x)<0$.

ويكون أيضا:

من أجل كل عدد حقيقي $\frac{1}{x}$ من المجال $]0\,;\alpha]$: $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$.

فنكتب:

$$0<\frac{1}{x}\le\alpha$$

نجد:

$$x\ge\frac{1}{\alpha}$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[$:

$$g\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha\,;1[$: $g(x)>0$.

ويكون أيضا:

من أجل كل عدد حقيقي $\frac{1}{x}$ من المجال $]\alpha\,;1[$: $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$.

فنكتب:

$$\alpha\le\frac{1}{x}<1$$

نجد:

$$1<x\le\frac{1}{\alpha}$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]1\,;\frac{1}{\alpha}\right]$:

$$g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]1\,;\frac{1}{\alpha}\right]$.

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه:

- الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]1\,;\frac{1}{\alpha}\right]$.
- الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	-2

3) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

فنكتب:

$$f(x)-y=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}+2$$
$$=\frac{1-2x+\ln x+2x-2}{x-1}$$
$$=\frac{-1+\ln x}{x-1}$$
$$f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x-1}$$

حيث:

إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $-1+\ln x$ على المجال $]1\,;+\infty[$.

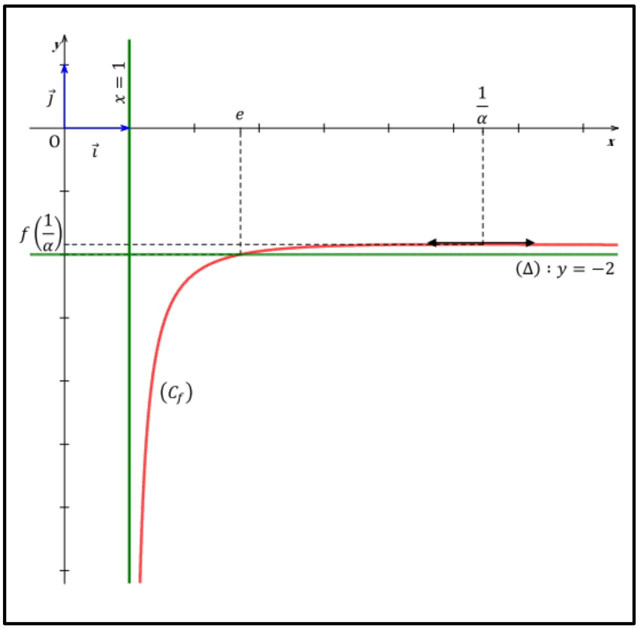
ينعدم البسط $-1+\ln x$ عند $x=e$.

نلخص الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) في الجدول التالي:

x	1	e	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يخترق (Δ) في النقطة $(e\,;-2)$	(C_f) يقع فوق (Δ)

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f):

(يعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\simeq -1{,}8$)



تعلم الرياضيات

5) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حلين متمايزين:

لدينا:

$$\begin{cases}|f(x)|=-f(x)\,;f(x)<0\\|f(x)|=+f(x)\,;f(x)\geq 0\end{cases}$$

لاحظ أن:

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقع أسفل محور الفواصل.

أي:

$$f(x)<0$$

ومنه:

$$|f(x)|=-f(x)$$

فنكتب:

$$-f(x)=m$$

أي:

$$f(x)=-m\ \dots(*)$$

التفسير:

الحلول البيانية للمعادلة $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة:

$$(\Delta_m):y=-m$$

حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلين متمايزين يجب أن يقطع المستقيم (Δ_m) المنحنى (C_f) في نقطتين.

من المنحنى البياني:

$$-2<-m<f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

أي:

$$-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<m<2$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]-f\left(\frac{1}{\alpha}\right);2\right[$: المعادلة $|f(x)|=m$ حلين متمايزين.