المسألة

الجزء الأول:

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0\,;+\infty[$ كما يلي:

$h(x) = x + (x-2)\,ln\,x$ و $g(x) = x - 1 - ln\,x$

1) أ- أدرس تغيرات الدالة g.

ب- استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$.

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\,ln\,x$$

3) أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$(x-1)\,ln\,x \geq 0$$

ب- استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 1 + x\,ln\,x - (ln\,x)^2$$

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$. فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

2) ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) ليكن (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1\,;1)$.

أ- عين معادلة المماس (Δ).

ب- تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f(x) - x = (ln\,x - 1)g(x)$$

جـ- أدرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (Δ).

4) أنشئ (Δ) و (C_f).

ملاحظة:

المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1,5.

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1 < u_n < e$$

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل

الجزء الأول:

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0\,;+\infty[$ كما يلي:

$h(x) = x + (x-2)\ln x$ و $g(x) = x - 1 - ln\,x$

1) أ- دراسة تغيرات الدالة g:

الدالة g معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$.

حساب النهايات:

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x - 1 - ln\,x)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} ln\,x = -\infty$$

حساب: $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - 1 - ln\,x)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{ln\,x}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

حساب الدالة المشتقة ودراسة إشارتها:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=(x-1-\ln x)'$$
$$=1-\frac{1}{x}$$

ومنه:

$$g'(x)=\frac{x-1}{x}$$

لاحظ أن $g'(x)$ تنعدم من أجل $x=1$ حيث:

$$g(1)=0$$

نلخص إشارة $g'(x)$ في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه:

- الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0\,;1]$.
- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1\,;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

1) ب- استنتاج أن $g(x)\geq 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن:

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0\,;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1\,;+\infty[$ والدالة g تقبل قيمة حدية صغرى عند النقطة $(1\,;0)$.

ومنه:

نستنتج من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$ أن:

$$g(x)\geq 0$$

2) تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

$$h(x)=x+(x-2)\ln x$$
$$=x+x\ln x-2\ln x$$
$$=x+x\ln x-\ln x-\ln x$$
$$=x+x\ln x-\ln x-\ln x-1+1$$
$$=1+(x-1-\ln x)+x\ln x-\ln x$$
$$=1+(x-1-\ln x)+(x-1)\ln x$$
$$=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

$$h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$$

3) أ- تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$(x-1)\ln x\geq 0$$

لاحظ أن $(x-1)$ و $\ln x$ ينعدمان من أجل $x=1$.

نستعين بجدول الإشارة التالي:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$	‖	$+$	0	$+$	

من الجدول، نلاحظ أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$(x-1)\ln x\geq 0$$

3) ب- استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$:

لدينا مما سبق:

$$g(x)\geq 0 \quad \text{و} \quad (x-1)\ln x\geq 0$$

بالجمع طرف لطرف:

$$g(x)+(x-1)\ln x\geq 0$$

ينتج:

$$1+g(x)+(x-1)\ln x>0$$

ومنه:

$$h(x)>0$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

نلخص إشارة $h(x)$ في الجدول التالي:

x	0 $+\infty$
$h(x)$	$+$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- حساب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(1+x\ln x-(\ln x)^2)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$$

لأن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x=0$$

التفسير الهندسي:

المنحنى البياني (C_f) الممثل للدالة f يقبل حامل محور التراتيب مستقيما مقاربا بجوار $-\infty$ معادلته: $x=0$.

1) ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x\ln x-(\ln x)^2)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1+x\ln x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right]$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$$

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{h(x)}{x}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$.

ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=(1+x\ln x-(\ln x)^2)'$$
$$=\ln x+1-2\frac{\ln x}{x}$$
$$=\frac{x+x\ln x-2\ln x}{x}$$
$$=\frac{x+(x-2)\ln x}{x}$$

ومنه:

$$f'(x)=\frac{h(x)}{x}$$

2) ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

لدينا مما سبق:

$$h(x)>0 \quad \text{و} \quad x>0$$

ومنه:

$$\frac{h(x)}{x}>0$$

أي:

$$f'(x)>0$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$

ومنه:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

3) أ- تعيين معادلة المماس (Δ):

حيث:

(Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1\,;1)$.

تعطى معادلته:

$$(\Delta): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\,;\ x_0=1$$
$$=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=x-1+1$$
$$=x$$

ومنه:

$$(\Delta): y=x$$

3) ب- التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$f(x)-x=(\ln x-1)\mathrm{g}(x)$$

$$\begin{aligned}f(x)-x&=1+x\ln x-(\ln x)^2-x\\&=x\ln x-x+1-(\ln x)^2\\&=x(\ln x-1)+1-(\ln x)^2\\&=x(\ln x-1)-((\ln x)^2-1)\\&=x(\ln x-1)-(\ln x-1)(\ln x+1)\\&=(\ln x-1)(x-(\ln x+1))\\&=(\ln x-1)(x-1-\ln x)\\&=(\ln x-1)\mathrm{g}(x)\end{aligned}$$

ومنه:

$$f(x)-x=(\ln x-1)\mathrm{g}(x)$$

3) ج- دراسة إشارة $f(x)-x$:

لاحظ أن إشارة $f(x)-x$ من إشارة $(\ln x-1)\mathrm{g}(x)$.

حيث $\mathrm{g}(x)$ تنعدم من أجل $x=1$ و $\ln x-1$ ينعدم من أجل $x=e$.

نستعين بجدول الإشارة التالي:

x	0		1		e		$+\infty$
$\mathrm{g}(x)$	||	+	0	+		+	
$\ln x-1$	||	−		−	0	+	
$(\ln x-1)\,\mathrm{g}(x)$	||	−	0	−	0	+	
$f(x)-x$	||	−	0	−	0	+	

استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (Δ):

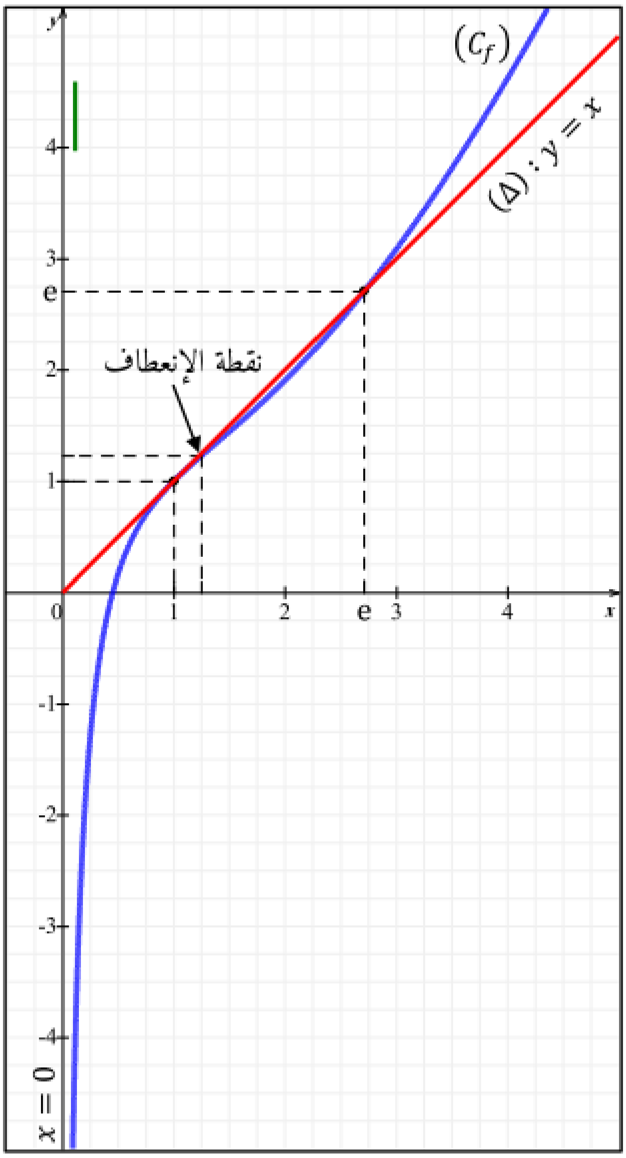
نستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (Δ) من جدول الإشارة أعلاه كما يلي:

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)-x$	||	−	0	−	0	+	
الوضعية	||	(C_f) أسفل (Δ)	(C_f) يمس (Δ) في النقطة $A(1\,;1)$	(C_f) أسفل (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e\,;e)$	(C_f) فوق (Δ)	

4) إنشاء (Δ) و (C_f):

نقبل أن (من المعطيات):

- المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها محصورة بين 0 و 1.
- المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 1,5.



الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=\sqrt{e}\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1<u_n<e$$

نسمي $P(n)$ الخاصية:

$1 < u_n < e$ من أجل كل عدد طبيعي n

من أجل: $n = 0$

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ \text{و} \\ 1 < \sqrt{e} < e \end{cases} \longrightarrow 1 < u_0 < e$$

ومنه: الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي: $1 < u_n < e$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي: $1 < u_{n+1} < e$ من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا من الفرضية: $1 < u_n < e$

والدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة تماما على المجال $]1\,;e[$.

(لأنها متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$).

ومنه:

$1 < u_n < e$

$f(1) < f(u_n) < f(e)$

$1 < f(u_n) < e$

$1 < u_{n+1} < e$

لأن:

$$f(e) = e \quad \text{و} \quad f(1) = 1$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < e$

2) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

تكون المتتالية (u_n) متناقصة إذا كان:

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

تذكر أنه من الجزء الثاني لدينا ما يلي:

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	

على المجال $]1\,;e[$:

لدينا:

$f(x) - x \leq 0$

$f(u_n) - u_n \leq 0$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة.

3) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متتالية متناقصة، $(u_{n+1} - u_n \leq 0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 $(1 < u_n < e)$ فهي إذن متقاربة نحو نهاية ℓ بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

حساب ℓ:

لدينا:

$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$f(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$f(\ell) = \ell$

$f(\ell) - \ell = 0$

$(\ln \ell - 1)\mathrm{g}(\ell) = 0$

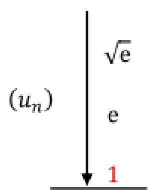
لأن:

$$f(x) - x = (\ln x - 1)\mathrm{g}(x)$$
$$f(\ell) - \ell = (\ln \ell - 1)\mathrm{g}(\ell)$$

تنعدم هذه المساواة من أجل $\ell = 1$ و $\ell = e$.

وبما أن (u_n) متتالية متناقصة فإن: $\ell = 1$.

نرفض القيمة $\ell = e$ لأن: $e > 1$.



مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr