

**∞ Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion ∞**  
**13 septembre 2018**

**Exercice 1**

**Commun à tous les candidats**

**4 points**

1. On a le système  $\begin{cases} g(0) = \frac{1}{8} \\ g(10) = \frac{64}{100} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{1+ke^{-0}} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{1+ke^{-10a}} = \frac{64}{100} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{1+ke^{-10a}} = \frac{64}{100} \end{cases}$

La première équation donne  $k = 7$  et en reportant cette valeur dans la deuxième équation :

$$\frac{1}{1+7e^{-10a}} = \frac{64}{100} \iff 100 = 64(1+7e^{-10a}) \iff 100 = 64 + 448e^{-10a} \iff 36 = 448e^{-10a} \iff 9 = 112e^{-10a} \iff \frac{9}{112} = e^{-10a} \iff -10a = \ln \frac{9}{112} \iff a = -\frac{1}{10} \ln \frac{9}{112} \iff a \approx 0,252\,127$$

2.

$$g(t) = \frac{1}{1+7e^{-\frac{t}{4}}}.$$

a. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$$g'(t) = -7 \times \frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}}{\left(1+7e^{-\frac{t}{4}}\right)^2} = \frac{7e^{-\frac{t}{4}}}{4\left(1+7e^{-\frac{t}{4}}\right)^2} > 0 \text{ car quotient de termes positifs.}$$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

b. Résolvons l'inéquation :  $\frac{1}{1+7e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}} \geq 0,99 \iff 1 \geq 0,99\left(1+7e^{-\left(\frac{t}{4}\right)}\right) \iff 1 \geq 0,99 + 0,693e^{-\frac{t}{4}} \iff 0,01 \geq 0,693e^{-\frac{t}{4}} \iff \frac{0,01}{0,693} \geq e^{-\frac{t}{4}} \iff \frac{10}{693} \geq e^{-\frac{t}{4}} \iff \ln \frac{10}{693} \geq -\frac{t}{4} \text{ (par croissance de la fonction logarithme népérien)} \iff \frac{t}{4} \geq -\ln \frac{10}{693} \iff t \geq 4 \times \left(-\ln \frac{10}{693}\right). \text{ Or } 4 \times \left(-\ln \frac{10}{693}\right) \approx 16,9.$

Donc dans 17 ans d'après ce modèle au moins 99 % des ménages seront équipés.

3. a. On a  $g(8) = \frac{1}{1+7e^{-\left(\frac{8}{4}\right)}} = \frac{1}{1+7e^{-2}} \approx 0,513$  soit 0,51 au centième près.

b. Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$n = 1000 > 30; \quad np = 930 \geq 5 \text{ et } n(1-p) = 70 \geq 5 : \text{ on peut donc considérer l'intervalle} \\ \left[ p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \approx [0,914 ; 0,946].$$

Or le sondage donne une fréquence de foyers équipés d'une connexion fixe égale à

$$\frac{880}{1000} = 0,880 \text{ et } 0,880 \notin [0,914 ; 0,946].$$

Ce sondage donne raison à ces statisticiens sceptiques.

**Exercice 2**  
Commun à tous les candidats

5 points

1.  $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0 \iff \begin{cases} z^2 - 2z + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases}.$

- $z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 = -3 \iff (z-1)^2 = (i\sqrt{3})^2$ .

Cette équation a deux solutions  $1+i\sqrt{3}$  et  $1-i\sqrt{3}$ .

- $z^2 + 4 = 0 \iff z^2 = (2i)^2$  : cette équation a deux solutions :  $2i$  et  $-2i$ .

Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$$1+i\sqrt{3}; \quad 1-i\sqrt{3}; \quad 2i; \quad -2i.$$

2. a. •  $|z_A|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$ .

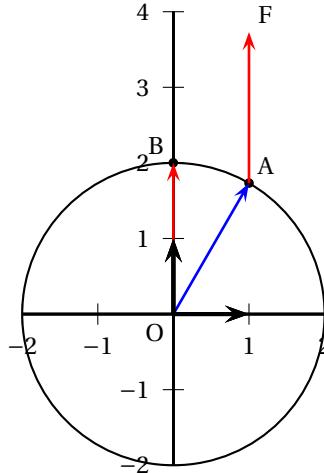
On peut écrire  $z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$  soit en écriture exponentielle

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

- $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

On a donc avec les modules  $OA = OB = 2$  : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b.



c. On a  $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

Or  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg \frac{z_B}{z_A} = \frac{\pi}{6}$ .

3. a. F se construit par la méthode du parallélogramme ; or on a vu que  $OA = OB$  : le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

- b. OAFB est un parallélogramme et  $OA = OB = 1$ , donc deux de ses côtés consécutifs ont même longueur : OAFB est donc un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$  ; donc une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$  est  $\frac{\pi}{12}$ .

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OF}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ qui est un argument de } z_F.$$

- c. On a  $z_F = z_A + z_B = 1 + i\sqrt{3} + 2i = 1 + i(\sqrt{3} + 2)$ .

$$\text{Donc } |z_F|^2 = 1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2 = 1 + 3 + 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2 + \sqrt{3}).$$

Donc  $|z_F| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

On a vu qu'un argument de  $z_F$  est  $\frac{5\pi}{12}$ , donc l'écriture trigonométrique de  $z_F$  est :

$$z_F = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

- d. On a vu que la partie réelle de  $z_F$  est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à  $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12}$ .

Donc en égalant :

$$1 = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12} \iff \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 \times (4 - 3)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

4. Ces deux nombres sont positifs ( $\sqrt{6} > \sqrt{2}$ ); comparons leurs carrés :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \left[ \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}; \\ & \bullet \quad \left[ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right]^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{4(2 - \sqrt{3})}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

### Exercice 3 Commun à tous les candidats

6 points

#### Question 1

Tout point  $M$  de  $(D)$  a des coordonnées qui vérifient  $x + y + z - 3 = 2 + t + 1 - 3t + 2t - 3 = 0$ , donc appartient à  $(P)$  : la droite  $(D)$  est incluse dans le plan  $(P)$  : réponse B.

#### Question 2

On sait que  $E = \frac{1}{\lambda} = 20$  donc  $\lambda = \frac{1}{20} = 0,05$ .

La probabilité que son attente dépasse les 10 minutes est égale à

$$P_{T \geq 20}(T \geq 30) = P(T \geq 10) = e^{-0,05 \times 30} = e^{-1,5} = e^{-\frac{1}{2}} : \text{réponse A.}$$

#### Question 3

La variable  $D' = \frac{D - 65}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

$$\text{On a } P\left(\frac{63,5 - 65,1}{\sigma}\right) \leq P(D') \leq P\left(\frac{66,7 - 65,1}{\sigma}\right) = 0,99.$$

$$\text{De } P\left(\frac{-1,6}{\sigma}\right) = 0,0005, \text{ la calculatrice donne } \sigma \approx 0,62 : \text{réponse C.}$$

#### Question 4

$f(x) = 2 \times \frac{2x}{x^2 + 1}$ ; on reconnaît une primitive  $F$  de  $f$  :  $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1)$ .

L'aire de la surface hachurée est donc égale (en unité d'aire) à :

$$\int_0^2 f(x) dx = [F(x) - F(0)]_0^2 = 2 \ln(2^2 + 1) - 2 \ln(0^2 + 1) = 2 \ln 5.$$

La droite d'équation  $x = a$  partage la surface en deux surfaces; les deux surfaces obtenues ont la même aire si :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^2 f(x) dx \iff F(a) - F(0) = F(2) - F(a) \iff 2F(a) = F(0) + F(2) \iff 2\ln(a^2 + 1) = 2\ln 1 + 2\ln 5 \iff 2\ln(a^2 + 1) = \ln 5 \iff \ln[(a^2 + 1)^2] = \ln 5 \iff (a^2 + 1)^2 = 5 \iff a^2 + 1 = \sqrt{5} \iff a^2 = \sqrt{5} - 1 \iff (\text{puisque } a > 0) \quad a = \sqrt{\sqrt{5} - 1}. \text{ Réponse B.}$$

**Exercice 4****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. Avec  $a = 2,9$  il semble que la suite  $(u_n)$  soit décroissante et convergente vers 1.

Avec  $a = 3,1$  il semble que la suite  $(u_n)$  soit croissante et tende vers  $+\infty$ .

2. a. Les termes  $u_n$  et  $u_{n+1}$  ayant pour limite  $\ell$ , on a donc  $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2}$ .

$$\text{b. } \ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0$$

1 est solution évidente de cette équation que l'on peut écrire  $(\ell - 1)(\ell - 3) = 0$ .

L'autre solution est donc  $\ell = 3$ .

Si elle converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.

3. a. On prend  $a = 2,9$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$f'(x) = x - 1$ ; donc  $f'(x) \geq 0$  pour  $x \geq 1$  : la fonction  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

$$\text{b. Initialisation: } u_0 = 2,9 \text{ et } u_1 : \frac{1}{2} \times 2,9^2 - 2,9 + \frac{3}{2} = 2,805.$$

On a bien  $1 \leq u_1 \leq u_0$ .

*Hérité*: supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  :

puisque la fonction  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ , les images par  $f$  des trois termes de cet encadrement sont rangées dans le même ordre :

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n).$$

$$\text{Soit avec } f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1 : 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} : \text{l'encadrement est vrai au rang } n+1.$$

On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang  $n$ , il l'est aussi au rang  $n+1$ .

D'après le principe de récurrence on a donc démontré que :

pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

- c. D'après le résultat précédent la suite  $(u_n)$  décroît et est minorée par 1 : elle est donc, d'après le théorème de la convergence monotone, convergente vers un nombre  $\ell \geq 1$ .

De plus  $a = 2,9$  est le premier terme de la suite qui est décroissante, donc  $\ell < 2,9$ .

Les deux seules valeurs possibles pour la limite sont 1 et 3 (question 2.b.) ; ça ne peut pas être 3 donc  $\ell = 1$ .

4. a. Si la suite est majorée, comme elle est croissante, elle est convergente (théorème de la convergence monotone).

On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est  $u_0 = 3,1 > 3$  et que la suite est croissante : cette suite n'est donc pas majorée.

- b. Par conséquent on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

c.

```

 $P \leftarrow 0$ 
 $U \leftarrow 3,1$ 

Tant que  $U \leq 10^6$ 
   $P \leftarrow P + 1$ 
   $U \leftarrow \frac{1}{2}U^2 - U + \frac{3}{2}$ 
Fin Tant que

```

Rem. L'algorithme s'arrête à  $u_9$ .

**Exercice 4** 5 points  
**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 6$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

1. •  $u_2 = 6u_1 - 8u_0 = 36 - 8 = 28$ ;
- $u_3 = 6u_2 - 8u_1 = 6 \times 28 - 8 \times 6 = 168 - 48 = 120$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -8u_n + 6u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$ .
3. a. On montre par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $A^n = 2^n B + 4^n C$ .

*Initialisation* : Pour  $n = 0$ ,  $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $2^0 B + 4^0 C = B + C = \begin{pmatrix} 2-1 & -0,5+0,5 \\ 4-4 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$  : la relation est vraie au rang 0.

*Hérité* : Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = 2^n B + 4^n C$ . On a

$A^{n+1} = A^n \times A = (2^n B + 4^n C) \times A = 2^n BA + 4^n CA$ . Or

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$  et  $CA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$ , d'où

$A^{n+1} = 2^n \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$  soit en factorisant 2 dans la première matrice et 4 dans la seconde :

$A^{n+1} = 2^{n+1} \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4^{n+1} \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  et enfin

$A^{n+1} = 2^{n+1} B + 4^{n+1} C$  : la relation est vraie au rang  $n+1$ .

On a montré que la relation est vraie au rang 0 et que si elle est vraie au rang  $n$  elle l'est aussi au rang  $n+1$  ; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = 2^n B + 4^n C$ .

- b. On a  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ , donc

$$U_n = A^n U_0 = (2^n B + 4^n C) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{or } 2^n B + 4^n C = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^{n-1} \\ 2^{n+2} & -2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4^n & 2 \times 4^{n-1} \\ -4^{n+1} & 2 \times 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4^n & -2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} \\ 2^{n+2} - 4^{n+1} & -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4^n & -2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} \\ 2^{n+2} - 4^{n+1} & -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

D'où en prenant le premier terme :

$$u_n = 2^{n+1} - 4^n + 6(-2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1}) = 2^{n+1} - 4^n - 3 \times 2^n + 3 \times 4^n = 2 \times 2^n - 3 \times 2^n - 4^n + 3 \times 4^n = 2 \times 4^n - 2^n.$$

### Partie B

- Calculons  $2^n(2^{n+1} - 1) = 2^{2n+1} - 2^n = 2 \times 2^{2n} - 2^n = 2 \times 4^n - 2^n = u_n$  (d'après la question précédente).
- a.** L'algorithme permet pour une valeur naturelle de  $N$  de dire si le nombre  $u_N$  est parfait ou non.

$N$	$P$	$U$	$S$	Affichage final
0	1	1	1	non
1	3	6	12	oui
2	7	28	56	oui
3	15	120	360	non
4	31	496	992	oui
5	63	2016	6552	non
6	127	8 128	16 256	oui

- b.** Il semble que  $u_P$  soit parfait lorsque  $P$  est un naturel premier; dans ce cas l'algorithme affiche « oui ».
  - a.** On sait que  $u_n = 2^n p_n$  et que  $p_n$  est un nombre premier.  
Les diviseurs de  $u_n$  sont donc les diviseurs de  $2^n$ , de  $p_n$ , ou leurs produits : ce sont donc  $2^0, 2^1, \dots, 2^n, 2^0 \times p_n, 2^1 \times p_n, \dots, 2^n \times p_n$ .  
Leur somme est
- $$\begin{aligned} S_n &= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + (2^0 \times p_n + 2^1 \times p_n + \dots + 2^n \times p_n) \\ &= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) p^n = (1 + p_n) (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) \\ &= (1 + p_n) \times 2^0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = (1 + p_n) (2^{n+1} - 1) = (1 + p_n) p_n \end{aligned}$$
- b.** On a  $p_n = 2^{n+1} - 1 \iff p_n + 1 = 2^{n+1}$ , donc :  
 $S_n = (1 + p_n) p_n = 2^{n+1} \times p_n = 2 \times 2^n p_n = 2u_n$ .  
Donc  $u_n$  est parfait si  $p_n$  est un naturel premier.