

Bac Côte d'Ivoire 2022

Mathématiques Séries A2-H

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

Exercice 1 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

Par exemple, pour l'énoncé 1., la bonne réponse est dans la colonne B. Tu écriras **1-B**.

N°	Énoncés	A	B	C
1.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ est égale à ...	$+\infty$	0	$-\infty$
2.	Pour tout nombre réel x , le nombre e^x est ...	nul	strictement négatif	strictement positif
3.	Si E et F sont deux événements incompatibles d'un univers Ω , alors $P(E \cup F)$ est égale à ...	$P(E) - P(F)$	$P(E) + P(F)$	$P(E) \times P(F)$
4.	La dérivée de la fonction $x \mapsto ax^n$, où $a \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ est la fonction ...	$x \mapsto ax^{n-1}$	$x \mapsto nax$	$x \mapsto nax^{n-1}$
5.	La somme $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) est égale à ...	$\frac{n(v_0 + v_n)}{2}$	$\frac{n(v_0 + v_{n-1})}{2}$	$\frac{r(v_0 + v_{n-1})}{2}$

Exercice 2 (2 points)

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition suivi de **Vrai** si la proposition est vraie, ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	L'équation $(E) : x \in \mathbf{R}, 2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$ admet pour ensemble de solutions $\{1; 3\}$.
2.	La droite d'ajustement d'un nuage de points passe par le point moyen.
3.	Le système d'équations $((x; y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \begin{cases} \ln(x) + 3\ln(y) = 9 \\ 2\ln(x) - \ln(y) = 4 \end{cases})$ admet pour ensemble solution $\{(3; 2)\}$.
4.	La dérivée de la fonction $x \mapsto 2x + 3 + e^x$ sur $\mathbf{R}$ est la fonction $x \mapsto 2 + e^x$.

Exercice 3 (5 points)

Un sac contient dix (10) petites boîtes cubiques indiscernables au toucher dont six (06) rouges, trois (03) vertes et une (01) jaune.

On tire simultanément trois (03) boîtes du sac.

On admet que la probabilité de tirer une boîte est indépendante de sa couleur.

1. Justifie qu'il y a 120 tirages possibles.

2. Détermine la probabilité de l'événement A "tirer exactement deux boîtes vertes".
3. Justifie que la probabilité de l'événement B "ne tirer aucune boîte verte" est égale à $\frac{7}{24}$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $] -\infty ; 3[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. a. Justifie que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$.
 b. Donne une interprétation graphique du résultat précédent.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $] -\infty ; 3[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Justifie que pour tout x de $] -\infty ; 3[$, $f'(x) = \frac{x(x - 6)}{(x - 3)^2}$.
 - b. Étudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - c. Dresse le tableau de variations de f .

Exercice 5 (5 points)

Un élève, en classe de 3^e, est déclaré vainqueur à un concours de mathématiques.

Pour le récompenser, le sponsor du concours lui verse, pendant douze mois, une somme d'argent dont le montant initial est de 25 000 F et cela à partir du 3 janvier 2022 (premier mois).

Le versement augmente de 6% du précédent versement à partir du deuxième mois jusqu'au douzième mois. Il souhaite, à la fin du douzième mois, utiliser la somme totale reçue pour s'acheter un ordinateur d'un coût de 500 000 F. Son père promet de donner la différence lui permettant d'acheter l'ordinateur, si la somme versée atteint au moins 400 000 F. L'élève se demande s'il pourra acheter l'ordinateur.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'élève pourra bénéficier de l'aide de son père pour acheter l'ordinateur ou non.



Correction

Exercice 1

Les affirmations de cet exercice sont des résultats du cours :

1-B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2-C : Pour tout réel x : $e^x > 0$

3-B : E et F sont incompatibles , alors : $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

4-C : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel x : $(ax^n)' = nax^{n-1}$

5-B : Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$, alors : $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n(v_0 + v_{n-1})}{2}$

Exercice 2

Les justifications présentées ici ne sont pas demandées .

1- Faux

En effet , posons $X = e^x$, alors :

$$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0 \iff 2X^2 - 3X + 1 = 0$$

Calcul du discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

L'équation n'admet que deux solutions : $X = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ ou $X = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$

D'où , les solutions :

$$e^x = \frac{1}{2} \text{ ou } e^x = 1 \iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ou } x = \ln 1 \iff x = -\ln 2 \text{ ou } x = 0$$

L'équation (E) admet pour ensemble de solutions $\{-\ln 2; 0\} \neq \{1; 3\}$

2- Vrai

Directement d'après le cours .

3- Faux

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \ln x + 3 \ln y = 9 \\ 2 \ln x - \ln y = 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} -2 \ln x - 6 \ln y = -18 \\ 2 \ln x - \ln y = 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 - 7 \ln y = -14 \\ 2 \ln x = 4 + \ln y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ln y = 2 \\ \ln x = 2 + \frac{1}{2} \ln y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ln y = 2 \\ \ln x = 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = e^2 \\ x = e^3 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système est : $\{(e^3; e^2)\} \neq \{(3; 2)\}$

4- Vrai

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : (2x + 3 + e^x)' = 2 + 0 + e^x = 2 + e^x$$

Exercice 3

1- On tire simultanément 3 boîtes du sac contenant 10 , alors :

$$\text{Le nombre de tirages possibles est : } \binom{10}{3} = 120$$

2- La probabilité de l'événement **A** "tirer exactement deux boîtes vertes" , donc :

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \times 7}{120} = \frac{7}{40}$$

$$P(A) = \frac{7}{40}$$

3- La probabilité de l'événement **B** "ne tirer aucune boîte verte" , donc :

$$P(B) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

$$P(B) = \frac{7}{24}$$

Exercice 4

1-a) On sait que $\lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 3x + 9 = 9$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

b) On a $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

3-a) La fonction f est dérivable sur $] -\infty; 3[$, donc :

Pour tout x de $] -\infty; 3[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3} \right)' = \frac{(x^2 - 3x + 9)'(x - 3) - (x^2 - 3x + 9)(x - 3)'}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x - 3) - (x^2 - 3x + 9)}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 9}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x}{(x - 3)^2} = \frac{x(x - 6)}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } x \text{ appartenant à }] -\infty; 3[: f'(x) = \frac{x(x - 6)}{(x - 3)^2}$$

b) Pour tout réel x de $] -\infty; 3[: (x - 3)^2 > 0$.

De plus, $3 > x \iff -3 > x - 6$, donc $x - 6 < 0$

Donc, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de x , donc :

$$\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \in] -\infty; 0] : f'(x) \geq 0 \\ \text{Pour tout } x \in [0; 3[: f'(x) \leq 0 \end{array}$$

c) Les résultats de la question précédente permettent de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	3
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f(0) = -3$	$-\infty$

Avec $f(0) = \frac{0^2 - 3 \times 0 + 9}{0 - 3} = \frac{9}{-3} = -3$

Exercice 5

Puisque chaque versement augmente mensuellement de 6% du précédent . Alors pour voir si l'élève pourra bénéficier de l'aide de son père pour acheter son ordinateur ou non , on utilise la suite géométrique (u_n) avec $n \in \mathbb{N}^*$, de raison 1,06 , définie par :

- $u_1 = 25000$ le montant initial (premier mois)

- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 1,06u_n$, avec :

- u_n le montant au n-ième mois
- u_{n+1} le montant au mois $n + 1$

(En effet , augmenter de 6% revient à multiplier par 1,06)

La somme totale notée T , reçue à la fin du douzième mois correspond donc à la somme des 12 premiers termes de la suite (u_n) , alors :

$$\begin{aligned} T &= u_1 + u_2 + \dots + u_{12} \\ &= u_1 \frac{1 - (1,06)^{12}}{1 - 1,06} \\ &\approx 421749 \end{aligned}$$

Enfin , $421749 > 400000$

Donc :

L'élève pourra bien bénéficier de l'aide de son père pour acheter l'ordinateur