Bac Côte d'Ivoire 2022
Mathématiques Série B

Durée : 3 heures
Coefficient : 4

L'usage d'une calculatrice scientifique est autorisé.

Exercice 1

On repique des plantes de $10cm$ de haut sous une serre . La taille maximale de ces plantes est de $1m$.
On note $f(t)$ la taille , en mètre (m) d'une plante après t jours . On a donc $f(0) = 0,1$.
Le modèle de Verharlot consiste à considérer que la vitesse de croissance d'une plante évolue suivant la relation $f'(t) = af(t)(1 - f(t))$, où a
est une constante non nulle dépendant des conditions expérimentales , autrement dit , f est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle : (E) : $y' = ay(1 - y)$.

1. On pose , pour tout t élément de $]0, +\infty[$: $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
a) Déterminer $z'(t)$ en fonction de $f(t)$.
b) Justifier que z est une solution de (E) si et seulement si $z' = -az + a$.

2. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $z' + az = a$
a) Résoudre l'équation différentielle homogène : $z' + az = 0$.
b) Déterminer une solution particulière z_0 de l'équation (E) sous la forme d'une fonction constante $p(t) = b$.
c) En déduire une solution générale de (E) .
d) Justifier que , pour tout nombre réel positif t , on a : $f(t) = \dfrac{1}{9e^{-at} + 1}$

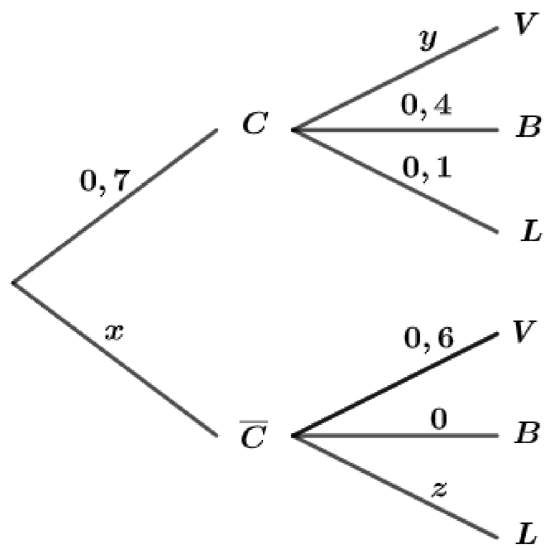
Exercice 2

Un vendeur de vêtements propose en vente des chemises et des pantalons qui sont confectionnés uniquement , soit en velours , soit en bazin , soit en lin .
Le client ne peut choisir qu'une seule article , soit une chemise , soit un pantalon .

Le vendeur a observé que :
•70% de ses clients achètent une chemise et 10% d'entre eux achètent une chemise en lin .
• Lorsqu'un client achète un pantalon , il n'achète jamais un pantalon en basin , mais demande un pantalon velours dans 60% des cas .

On considère les évènements suivants :
- **B :" Le client achète du bazin"** .
- **C :"Le client achète une chemise"** .
- **L :"Le client achète du lin"** .
- **V :"Le client achète du velours"** .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre des probabilités.
Déterminer les nombres réels x, y et z indiqués sur l'arbre .



2.a) Calculer la probabilité que le client achète une chemise en velours .
b) Calculer la probabilité que le client achète un pantalon en lin .

3. Montrer que la probabilité que le client achète du velours est $0,53$.

4.
- La chemise est vendue à **3000 F** l'unité .
- Le pantalon en velours est vendu à **1000 F** l'unité , celui en lin ou bien en bazin à **2000 F** .

a) On note x_i la valeur possible en **francs (F)** du gain du vendeur et p_i la probabilité de réalisation .
Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi du gain du vendeur en justifiant les réponses .

Valeur x_i	3000	2000	1000
Probabilité p_i			

b) Calculer l'espérance mathématique de la vente .
c) Déterminer le gain en **francs (F)** que le vendeur peut espérer pour 150 articles vends .

Problème
Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x$.

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et g' sa fonction dérivée .
a) Démontrer que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$.
b) Justifier que :

- Pour tout $x \in]0;1[$, $\quad g'(x) < 0$
- Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $\quad g'(x) > 0$

2.a) Justifier que $g(1)$ est le minimum de g sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 3 - x - \dfrac{2\ln x}{x}$.
Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;I;J)[/tex]$.
$Unitésgraphiques$: $[tex]OI = 2$ cm et $OJ = 1$ cm

1.a) Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat .
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
d) Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D) .

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et f' sa fonction dérivée .
a) Démontrer que, pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-2g(x)}{x^2}$.
b) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation .

3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 .
b) Tracer les droites (D) et (T) puis construire $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;I;J)$.

Partie C

On considère la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = (\ln x)^2$.

1. On admet que la fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$ et H' sa fonction dérivée .
a) Déterminer $H'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.
b) Justifier que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $f(x) = 3 - x - H'(x)$.

2. En déduire une primitive F de f qui prend la valeur 2 en 1 .

Correction

Exercice 1

1-a) Pour tout $t \in]0, +\infty[$: $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

Donc, pour tout $t \in]0; +\infty[$: $z'(t) = \left(\dfrac{1}{f(t)}\right)' = \dfrac{-f'(t)}{(f(t))^2}$

$$\boxed{\forall t \in]0; +\infty[\, : z'(t) = -\frac{f'(t)}{(f(t))^2}}$$

b) **Erreur dans l'énoncé :** Justifier que f est une solution de (E) si et seulement si $z' = -az + a$

On a :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in [0; +\infty[\, : f'(t) = af(t)(1 - f(t)) \\
&\iff \forall t \in [0; +\infty[\, : \frac{f'(t)}{(f(t))^2} = \frac{af(t)(1 - f(t))}{(f(t))^2} \\
&\iff \forall t \in [0; +\infty[\, : -\frac{f'(t)}{(f(t))^2} = \frac{a(f(t) - 1)}{f(t)} \\
&\iff \forall t \in [0; +\infty[\, : z'(t) = a\left(1 - \frac{1}{f(t)}\right) \\
&\iff \forall t \in [0; +\infty[\, : z'(t) = a(1 - z(t)) \\
&\iff \forall t \in [0; +\infty[\, : z'(t) = -az(t) + a \\
&\iff \boxed{z' = -az + a}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est une solution de } (E) \text{ si et seulement si } z' = -az + a}$$

Remarque :

> L'exercice suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ par définition de la fonction $z = \dfrac{1}{f}$, on peut donc diviser par f.

2) Dans cette partie de l'exercice, une nouvelle équation différentielle est aussi notée $(E) : z' + az = a$, pour éviter toute ambiguité, nous noterons cette dernière $(E') : z' + az = a$, pour la distinguer de $(E) : y' = ay(1 - y)$

a) D'après le cours, les solutions de l'équation homogène $z' + az = 0$ sont les fonctions de la forme $z(t) = ke^{-at}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z' + az = 0 \text{ sont de la forme } z : t \mapsto ke^{-at} \; / \; k \in \mathbb{R}}$$

b) Soit $z_0 = p(t) = b \in \mathbb{R}$ une solution particulière de (E')

Donc : $z_0' + az_0 = a \iff p'(t) + ap(t) = a \iff 0 + ab = a \iff b = 1 \quad (\text{ car } a \neq 0)$

$$\boxed{\text{La fonction constante } z_0 : x \mapsto 1 \text{ est une solution particulière de } (E')}$$

c) Une solution générale de (E') est la somme de la solution homogène trouvée en a) et d'une solution particulière trouvée en b) , donc :

$$\boxed{\text{Une solution générale de } (E') \text{ est donc } z : t \mapsto ke^{-at} + 1}$$

d) On a, z est solution de l'équation (E') , alors pour tout $t \in [0; +\infty[$, z s'écrit sous la forme $z(t) = ke^{-at} + 1$, $k \in \mathbb{R}$

Alors, pour tout $t \in [0; +\infty[$: $f(t) = \dfrac{1}{z(t)} = \dfrac{1}{ke^{-at} + 1}$

Finalement, on a $f(0) = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{1}{ke^{-a\times 0} + 1} = 0,1$, et donc $\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{10} \iff k + 1 = 10 \iff k = 9$

Conclusion :

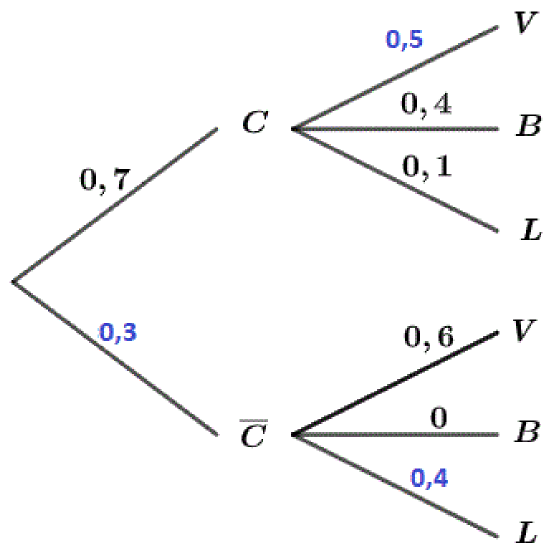
$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geqslant 0 : f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}}$$

Exercice 2

1) On a

- $x + 0,7 = 1 \iff \boxed{x = 0,3}$
- $y + 0,4 + 0,1 = 1 \iff \boxed{y = 0,5}$
- $z + 0 + 0,6 = 1 \iff \boxed{z = 0,4}$

Et on complète l'arbre pondéré :



2-a) La probabilité que le client achète une chemise en velours est $P(C \cap V)$, donc :

$$P(C \cap V) = 0,7 \times 0,5 \Rightarrow \boxed{P(C \cap V) = 0,35}$$

b) La probabilité que le client achète un pantalon en lin est $P(\bar{C} \cap L)$, donc :

$$P(\bar{C} \cap L) = 0,3 \times 0,4 \Rightarrow \boxed{P(\bar{C} \cap L) = 0,12}$$

3) La probabilité P que le client achète du velours est $P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$, donc :

$$P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V) = 0,35 + 0,3 \times 0,6 = 0,35 + 0,18 \Rightarrow \boxed{P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V) = 0,53}$$

4-a) On sait que :

• La chemise est vendue à 3000 F l'unité, donc : $p(x = 3000) = P(C) = 0,7$

• Le pantalon en lin ou en bazin est vendu à 1000 F l'unité, donc : $p(x = 2000) = P(\bar{C} \cap L) + P(\bar{C} \cap B) = 0,12 + 0 = 0,12$

• Le pantalon en velours est vendu à 1000 F l'unité, donc : $p(x = 1000) = P(\bar{C} \cap V) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$

Vérification : $p(x = 1000) + p(x = 2000) + p(x = 3000) = 0,18 + 0,12 + 0,7 = 1$

On complète le tableau :

Valeur x_i	3000	2000	1000
Probabilité p_i	$0,7$	$0,12$	$0,18$

b) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(X = x_i) = 1000 \times 0,18 + 2000 \times 0,12 + 3000 \times 0,7 \Longrightarrow \boxed{E(X) = 2520}$$

c) Puisque $E(X) = 2520$, alors le vendeur peut espérer gagner **2520F** par article vendu.

Alors, pour **150** articles vendus :

$$\boxed{\text{Le vendeur peut espérer gagner } 150 \times 2520 = 378000F}$$

Problème

Partie A

1-a) La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0 : g'(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x\right)' \\ &= x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2-1}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0 : g'(x) = \frac{x^2-1}{x}}$$

b) On a : $\forall x > 0 : g'(x) = \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

Sur $]0;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$

Dressons le tableau de signes de $x - 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

On en tire que :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bullet & \text{Pour tout } x \in]0;1[\text{ ,} & g'(x) < 0 \\ \bullet & \text{Pour tout } x \in]1;+\infty[\text{ ,} & g'(x) > 0 \end{array}}$$

2-a) On déduit de la question précédente que :

- g est strictement décroissante sur $]0;1[$
- g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Dressons alors le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

On en déduit que :

$$\boxed{g(1) \text{ est un minimum de } g \text{ sur }]0;+\infty[}$$

b) Puisque $g(1)$ est un minimum de g sur $]0;+\infty[$. Alors :

$$\forall x \in]0;+\infty[\ :\ g(x) \geqslant g(1)$$

Or, $g(1) = \dfrac{1}{2} + 1 - \ln 1 = \dfrac{3}{2} > 0$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\ :\ g(x) > 0}$$

Partie B

1-a) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3 - x - \dfrac{2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 3 - x - 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = 3 - 2 \times (+\infty) \times (-\infty) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

Interprétation graphique :

$$\boxed{\text{L'axe des ordonnées (d'équation } x = 0\text{) est une asymptote verticale à la courbe } (\mathscr{C})}$$

b) On a la limite usuelle suivante $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 - x - 2\dfrac{\ln x}{x} = 3 - \infty - 2 \times 0 = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

c) On calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y$ tel que $y = -x + 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} 3 - x - \frac{2\ln x}{x} + x - 3 = \lim_{x\to+\infty} = -\frac{2\ln x}{x} = 0$

En effet, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc

$$\boxed{\text{La droite } (D) : y = -x + 3 \text{ est une asymptote oblique à } (\mathscr{C}) \text{ en } +\infty}$$

d) Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D) revient à étudier le signe de $f(x) - y$ tel que $y = -x + 3$

$\forall x \in]0; +\infty[\, : f(x) - y \quad = \quad -\frac{2\ln x}{x}$

Puisque pour tout réel $x \in]0; +\infty[\, : x > 0$, alors le signe de $f(x) - y$ est l'opposé de celui de $\ln x$

Or, d'après le cours, on sait que :

Pour tout $x \in]0; 1[\, : \ln x < 0$, et pour tout $x \in]1; +\infty[\, : \ln x > 0$, avec $\ln 1 = 0$

On en tire que :

$$\begin{gathered} \forall x \in]0; 1[\, : f(x) - y > 0 \Rightarrow f(x) > y \\ \text{Si } x = 1 : f(x) = y \\ \forall x \in]1; \infty[\, : \, : f(x) - y < 0 \Rightarrow f(x) < y \end{gathered}$$

Ce qui s'interprète graphiquement par :

$$\boxed{\begin{array}{lc} \bullet & (\mathscr{C}) \text{ est au-dessus de } (D) \text{ sur }]0; 1[\\ \bullet & (\mathscr{C}) \text{ coupe } (D) \text{ au point } A(1; f(1)) = A(1; 2) \\ \bullet & (\mathscr{C}) \text{ est en dessous de } (D) \text{ sur }]1; +\infty[\end{array}}$$

En effet : $f(1) = 3 - 1 - 2\ln 1 = 2$

2-a) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\forall x>0 : f'(x) &= \left(3-x-\frac{2\ln x}{x}\right)' &&= -1-2\left(\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}\right)\\
&= -1-2\frac{\frac{x}{x}-\ln x}{x^2} &&= -1-2\frac{1-\ln x}{x^2}\\
&= \frac{-x^2-2(1-\ln x)}{x^2} &&= \frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}\\
&= -2\times\frac{\frac{x^2}{2}+1-\ln x}{x^2} &&= \frac{-2g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x\in]0;+\infty[\ ,\ f'(x)=\frac{-2g(x)}{x^2}}$$

b) On a vu que pour tout $x>0$, $g(x)>0$ et $x^2>0$. Donc :

$$\text{Pour tout } x>0\ ,\ f'(x)=\frac{-2g(x)}{x^2}<0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$$

Dressons alors le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3-a) Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 s'écrit :

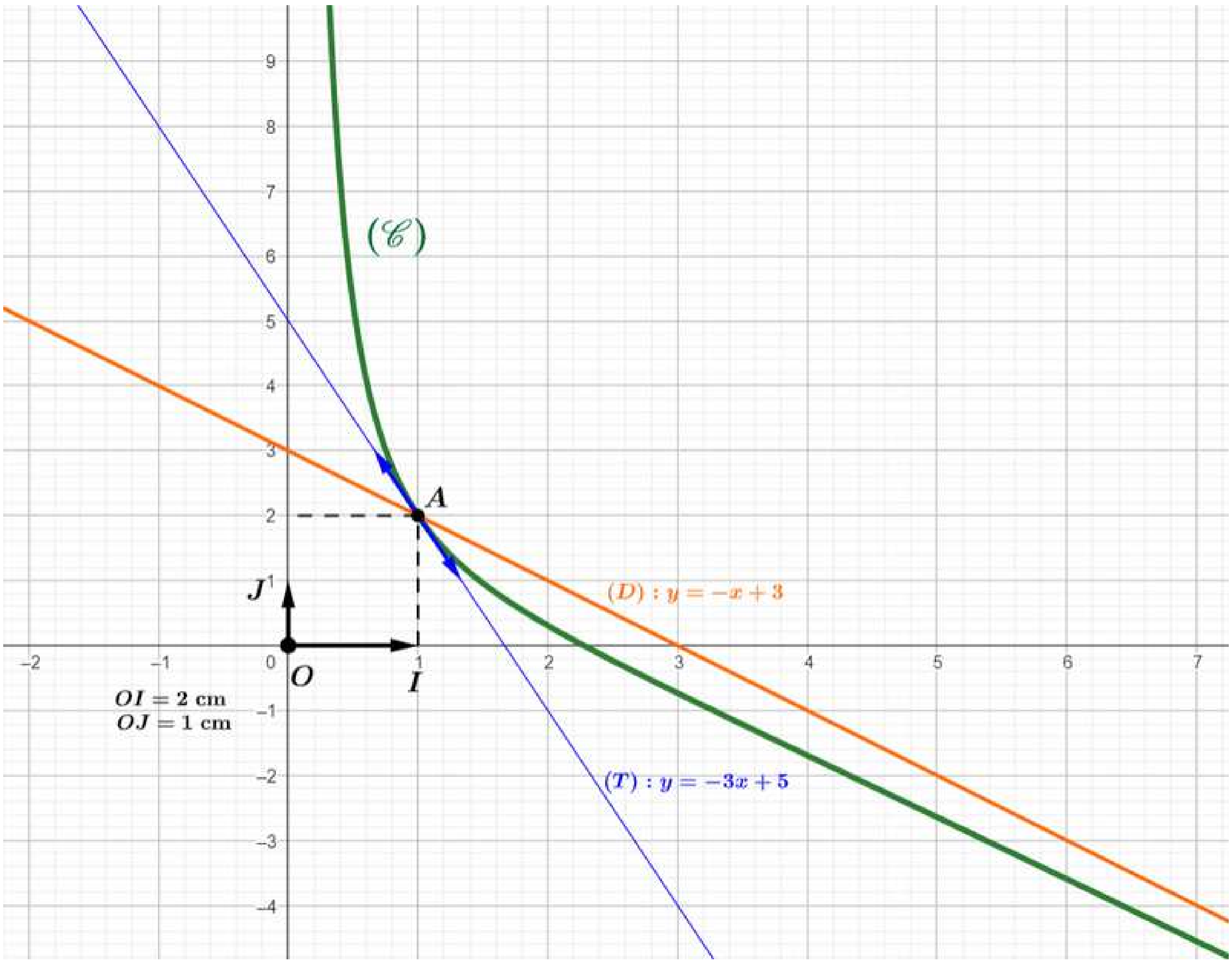
$$(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$$

On a déjà calculé $f(1)=2$, calculons $f'(1)$: $f'(1)=\dfrac{-2g(1)}{1^2}=-2g(1)=-2\times\dfrac{3}{2}=-3$

On trouve :

$$(T) : y=-3(x-1)+2 \iff \boxed{(T) : y=-3x+5}$$

b) **Graphique :**



Partie C

1-a) La fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Donc, $\forall x \in]0;+\infty[\ :\ H'(x) = \left((\ln x)^2\right)' = 2(\ln x)' \ln x = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x}$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\ :\ H'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}}$$

b) Puisque pour tout réel x strictement positif : $f(x) = 3 - x - \dfrac{2\ln x}{x}$

Alors directement :

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\ :\ f(x) = 3 - x - H'(x)}$$

2) Une primitive F de f s'écrit : $F(x) = \displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$

Donc :

$$\begin{array}{rclcl} F(x) & = & \displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x & = & \displaystyle\int 3 - x - H'(x)\ \mathrm{d}x \\ & = & 3x - \dfrac{x^2}{2} - H(x) + k\ /\ k \in \mathbb{R} & = & 3x - \dfrac{x^2}{2} - (\ln x)^2 + k\ /\ k \in \mathbb{R} \end{array}$$

Finalement, F prend la valeur 2 en 1 , autrement dit, $F(1) = 2$

$$F(1) = 2 \iff 3 - \frac{1}{2} - (\ln 1)^2 + k = 2 \iff 3 - \frac{1}{2} + k = 2 \iff k = 2 - 3 + \frac{1}{2} = \frac{-2+1}{2} \iff \boxed{k = -\frac{1}{2}}$$

Donc : $F(x) = 3x - \dfrac{x^2}{2} - (\ln x)^2 - \dfrac{1}{2} = 3x - \dfrac{x^2+1}{2} - (\ln x)^2$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Une primitive } F \text{ de } f \text{ telle que } F(1) = 2 \text{ est définie par } F(x) = 3x - \frac{x^2+1}{2} - (\ln x)^2}$$