Ministère de l'Éducation Nationale		**République du Mali**
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation		**Un Peuple-Un But-Une Foi**
EXAMEN : Baccalauréat Général		BAC 2023
Série: TSEXP		SESSION : Juin 2023
Épreuve: Mathématiques	Durée: 3 heures	Coefficient: 3

Exercice 1……………………………………………………………………………4 pts

1. Soit la fonction $h : x \mapsto h(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}$.

a. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in IR - \{1\}, h(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$.

b. Déduis-en la primitive H de h sur $]-\infty, 1[$ telle que : $H(-1) = -\ln 2$.

2. Soit x un nombre réel, $I(x)$ et $J(x)$ les intégrales suivantes :

$I(x) = \int_0^x (\cos^2 t)\,dt$ et $J(x) = \int_0^x (\sin^2 t)\,dt$.

a. Calcule $I(x) + J(x)$ et $I(x) - J(x)$.

b. Déduis-en $I(x)$ et $J(x)$.

Exercice 2…………………………………………………………………….6 pts

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2+6i)z - 16 + 12i = 0$.

2. Soit $p(z) = z^3 - (4+6i)z^2 - (12-24i)z + 32 - 24i$.

a. Montre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle z_0.

b. Factorise $p(z)$ puis résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$.

II. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -2 + 4i$.

1. a. Calcule le rapport $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis déduis-en la nature du triangle ABC.

b. Détermine l'ensemble (E) des points du plan vérifiant $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$.

2. Soit s la similitude directe telle que $s(A) = A$ et $s(B) = C$.

a. Détermine le rapport k et l'angle θ de s.

b. Déduis-en l'expression de s.

Problème………………………………………………………………….. 10 pts

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

A.

Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto g\left(x\right) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_g de g .

2. Résous, sur D_g , l'inéquation $g\left(x\right) \geq 0$.

3. Détermine trois nombres réels a , b et c tels que pour tout $x \in D_g$: $g\left(x\right) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$.

B.

Soit la fonction f définie de IR vers IR par : $f : x \mapsto f\left(x\right) = x + 2 + \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$.

Soit $\left(C\right)$ la représentation graphique de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudie les variations de f .

2. a. Montre que la droite $\left(D\right)$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à $\left(C\right)$.

   b. Précise la position de $\left(C\right)$ par rapport à $\left(D\right)$.

   c. Détermine les coordonnées du point d'intersection de $\left(C\right)$ et $\left(D\right)$ puis écrit une équation de la tangente à $\left(C\right)$ en ce point.

3. Etudie le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

4. a. Trace la courbe $\left(C\right)$ et la droite $\left(D\right)$.

   b. Précise les points d'intersection de $\left(C\right)$ et de la droite $\left(D'\right)$ d'équation $y = x$.

5. Montre que le point $A\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\left(C\right)$.

Exercice 1 : .... 4 points

1. La fonction $h : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x-2}{x^3-1}$

a. Déterminons trois nombres a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ h(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$h(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{a(x^2+x+1)+(x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b+c=-2 \\ a-c=-2 \end{cases}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ ce système.

Méthode 1 : Pivot de Gauss.

$$\begin{cases} a+b=1 & (L_1) \\ a-b+c=-2 & (L_2) \\ a-c=-2 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 & (L_1) \\ 2b-c=3 & (L_2') \\ b+c=3 & (L_3') \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2' \leftarrow L_2' \\ L_3' \leftarrow L_2' - 2L_3' \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2b-c=3 \\ -3c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Donc $h(x) = \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Méthode 2 : substitution

$$\begin{cases} a+b=1 & (L_1) \\ a-b+c=-2 & (L_2) \\ a-c=-2 & (L_3) \end{cases}$$

$(L_1) \Longrightarrow a = 1-b$

Remplaçons a par son expression dans (L_2) *et* (L_3), on aura :

$$\begin{cases} c-2b=-3 & (L_2') \\ -b-c=-3 & (L_3') \end{cases}$$

$(L_2') \Longrightarrow c = 2b-3$

Remplaçons c par son expression dans (L_3')

$(L_3') \Longrightarrow -b-c=-3 \Longrightarrow -b-(2b-3)=-3 \Longrightarrow -3b=-6 \Longrightarrow b=2$

$c = 2b-3 = 4-3 = 1$

$a = 1-b = 1-2 = -1$

$a=-1$; $b=2$; $c=1$.

Donc $h(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

b. Déduisons la primitive H de h sur $]-\infty\,;1[$ telle que $H(-1)=-\ln 2$

$H(x)=-\ln|x-1|+\ln|x^2+x+1|+k$; avec $k\in\mathbb{R}$

$H(-1)=-\ln 2 \Longrightarrow -\ln(2)+\ln(1)+k=-\ln 2 \Longrightarrow k=0$

$\forall\ x\in\ ]-\infty\,;1[$, $|x-1|=-x+1$, car $x-1<0$ et $|x^2+x+1|=x^2+x+1$, car $x^2+x+1>0$

Donc $H(x)=-\ln(-x+1)+\ln(x^2+x+1)$

2. Soit x un nombre réel, $I(x)$ et $J(x)$ les intégrales définies comme suit :

$I(x)=\int_0^x(\cos^2 t)dt\ \ et\ J(x)=\int_0^x(\sin^2 t)dt$

a. Calculons $I(x)+J(x)$ et $I(x)-J(x)$

$I(x)+J(x)=\int_0^x(\cos^2 t)dt+\int_0^x(\sin^2 t)dt=\int_0^x(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\int_0^x 1dt=[t]_0^x=x$

$I(x)+J(x)=x$

$I(x)-J(x)=\int_0^x(\cos^2 t)dt-\int_0^x(\sin^2 t)dt$

$$=\int_0^x(\cos^2 t-\sin^2 t)dt=\int_0^x\cos(2t)dt=\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^x=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$I(x)-J(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

b. Déduisons $I(x)$ et $J(x)$

$$\begin{cases}I(x)+J(x)=x\\ I(x)-J(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\end{cases}$$

$2I(x)\quad =x+\frac{1}{2}\sin(2x)\Longrightarrow I(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$ et $J(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$.

Exercice 2 : .... 6 points

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-(2+6i)z-16+12i=0$

$\Delta=b^2-4ac=[-(2+6i)]^2-4(1)(-16+12i)=-32+24i+64-48i$

$\quad=32-24i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta=32-24i$

Méthode 1

Soit δ un nombre complexe tel que $\delta^2=\Delta$

$$\delta=a+ib\ ;\ \delta^2=\Delta\Longrightarrow\begin{cases}2ab=-24 & (1)\\ a^2-b^2=32 & (2)\\ a^2+b^2=|\Delta|=\sqrt{(32)^2+(-24)^2}=40 & (3)\end{cases}$$

$(2)+(3)\Longrightarrow 2a^2=72\Longrightarrow a^2=36\Longrightarrow a=6$ ou $a=-6$

Pour $a=6$, $2ab=-24\Longrightarrow 12b=-24\Longrightarrow b=-2$

Pour $a=-6$, $2ab=-24\Longrightarrow -12b=-24\Longrightarrow b=2$

$\delta_1 = 6 - 2i$; $\delta_2 = -6 + 2i$ sont les racines carrées de Δ.

$$z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a} = \frac{(2+6i)+(6-2i)}{2(1)} = \frac{2+6i+6-2i}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a} = \frac{(2+6i)+(-6+2i)}{2(1)} = \frac{2+6i-6+2i}{2} = \frac{-4+8i}{2} = -2+4i$$

$S = \{-2+4i\ ;\ 4+2i\}$

Méthode 2

Soit δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta = 32 - 24i$

$Im(\Delta) = -24 < 0$, $Re(\Delta) = 32$,

$$|\Delta| = \sqrt{(32)^2 + (-24)^2} = \sqrt{1024+576} = \sqrt{1600} = 40$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{|\Delta| + Re(\Delta)}{2}} - i\sqrt{\frac{|\Delta| - Re(\Delta)}{2}} = \sqrt{\frac{40+32}{2}} - i\sqrt{\frac{40-32}{2}}$$

$$= \sqrt{36} - i\sqrt{4} = 6 - 2i$$

$\delta_2 = -\delta_1 = -6 + 2i.$

$$z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a} = \frac{(2+6i)+(6-2i)}{2(1)} = \frac{2+6i+6-2i}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a} = \frac{(2+6i)-(6-2i)}{2(1)} = \frac{2+6i-6+2i}{2} = \frac{-4+8i}{2} = -2+4i$$

$S = \{-2+4i\ ;\ 4+2i\}$

2. Soit $p(z) = z^3 - (4+6i)z^2 - (12-24i)z + 32 - 24i$

a. Montrons que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle z_0

Posons $z_0 = a$; $a \in \mathbb{R}$

$$p(a) = 0 \Longrightarrow a^3 - (4+6i)a^2 - (12-24i)a + 32 - 24i = 0$$
$$\Longrightarrow (a^3 - 4a^2 - 12a + 32) + i(-6a^2 + 24a - 24) = 0$$

Par indentification on a:

$$\begin{cases} a^3 - 4a^2 - 12a + 32 = 0 & (1) \\ -6a^2 + 24a - 24 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Longrightarrow -6a^2 + 24a - 24 = 0 \Longrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Longrightarrow (a-2)^2 = 0 \Longrightarrow a = 2$

Vérifions (1) pour $a = 2$

$(1) \Longrightarrow (2)^3 - 4(2)^2 - 12(2) + 32 = 0 \Longrightarrow 8 - 16 - 24 + 32 = 0$ vraie.

Par conséquent $z_0 = 2$ est une solution réelle de l'équation $p(z) = 0$

b. Factorisons $p(z)$ puis résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$

Factorisation :

2 est une racine de $p(z)$, on peut donc la factoriser par $z - 2$

Méthode 1 : Tableau d'Hörner

	1	$-4-6i$	$-12+24i$	$32-24i$
2	$\downarrow$	2	$-4-12i$	$-32+24i$
	1	$-2-6i$	$-16+12i$	0

$p(z) = (z-2)[z^2 - (2+6i)z - 16 + 12i]$

Méthode 2 : Division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} z^3 - (4+6i)z^2 - (12-24i)z + 32 - 24i & z-2 \\ \hline \underline{-z^3 + 2z^2} & z^2 - (2+6i)z - 16 + 12i \\ \quad (-2-6i)z^2 - (12-24i)z & \\ \quad \underline{(2+6i)z^2 - (4+12i)z} & \\ \qquad (-16+12i)z + 32 - 24i & \\ \qquad \underline{-(-16+12i)z - 32 + 24i} & \\ \qquad\qquad 0 \quad + \quad 0 & \end{array}$$

Alors $p(z) = (z-2)[z^2 - (2+6i)z - 16 + 12i]$

Méthode 3 : Les coefficients indéterminés

$p(z) = z^3 - (4+6i)z^2 - (12-24i)z + 32 - 24i$

2 est une racine de $p(z)$ alors $p(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$ où $b, c \in \mathbb{R}$

$p(z) = (z-2)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b-2)z^2 + (c-2b)z - 2c$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} b - 2 = -4 - 6i \\ c - 2b = -12 + 24i \\ -2c = 32 - 24i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -2 - 6i \\ c = -16 + 12i \end{cases}$$

$p(z) = (z-2)[z^2 - (2+6i)z - 16 + 12i]$

Résolution

$p(z) = 0 \Longrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 - (2+6i)z - 16 + 12i = 0$

D'après 1°) on a : $S = \{2\ ;\ -2+4i\ ;\ 4+2i\}$.

II. Les points A, B et C ont respectivement pour affixes $z_A = 2$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -2 + 4i$

1. **a.** Calculons le rapport $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis déduisons-en, la nature du triangle ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2+4i-2}{4+2i-2} = \frac{-4+4i}{2+2i} = \frac{(-4+4i)(2-2i)}{8}$$

$$= \frac{-8+8i+8i+8}{8} = 2i$$

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2i$ alors ABC est un triangle rectangle en A

b. Déterminons l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$

Soit M le point d'affixe $z = x + iy$; $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2$

Méthode 1 : Géométrique

$$|z-4-2i| = |z+2-4i| \Leftrightarrow |z-(4+2i)| = |z-(-2+4i)|$$
$$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = |z_M - z_C| \Leftrightarrow BM = CM$$

L'ensemble (E) est la médiatrice du segment $[BC]$

Méthode 2 : Algébrique

$z = x + iy$

$|z-4-2i|=|z+2-4i| \Leftrightarrow |x+iy-4-2i|=|x+iy+2-4i|$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$
$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-4)^2$
$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2+4x+4+y^2-8y+16$
$\Rightarrow -8x-4y=4x-8y \Rightarrow -12x+4y=0 \Leftrightarrow -3x+y=0 \Rightarrow y=3x.$
L'ensemble (E) est la droite d'équation $y=3x$.

2. Soit s la similitude directe telle que $s(A)=A$ et $s(B)=C$

a. Déterminons le rapport k et l'angle θ de s

$k=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|2i|=2$

$\theta=Arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=Arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}rad$

s est la similitude directe de centre A, de rapport $k=2$ et d'angle $\theta=\dfrac{\pi}{2}rad$

b. Déduisons l'expression de s

Soit s: $z'=az+b$

Méthode 1

$s(A)=A \Rightarrow z'_A=z_A \Rightarrow z_A=a.z_A+b \Rightarrow 2a+b=2 \quad (1)$
$s(B)=C \Rightarrow z_C=z'_B=az_B+b \Rightarrow (4+2i)a+b=-2+4i \quad (2)$

D'après (1) et (2), on a :

$$\begin{cases}2a+b=2\\(4+2i)a+b=-2+4i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=2\\(-4-2i)a-b=2-4i\end{cases}$$

$$(-2-2i)a \quad =4-4i \Rightarrow a=\frac{4-4i}{-2-2i}$$
$$=\frac{-4+4i}{2+2i} = 2\ i$$

$(1) \Rightarrow 2a+b=2 \Rightarrow 4i+b=2 \Rightarrow b=2-4i$
s: $z'=2iz+2-4i$

Méthode 2

$z'-z_A=ke^{\theta i}(z-z_A) \Rightarrow z'=2iz-4i+2$
s: $z'=2iz-4i+2$

Problème : .... 10 points

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

A. Soit g la fonction définie par $g : x \longmapsto g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$

1. Déterminons l'ensemble de définition D_g de g.

$D_g=\{x/x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2+x\neq 0\}$
Posons : $x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x+1=0$
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\,;0\} =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;0[\cup]0\,;\,+\infty[$

2. Résolvons sur D_g, l'inéquation $g(x) \geq 0$

$$g(x) \geq 0 \Longrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2+x} \geq 0$$

$\forall x \in D_g,\ x^2+x+1>0$;

$x^2+x=0 \Longrightarrow x=-1$ ou $x=0$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
x^2+x+1	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+$	||	$-$	||	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$

3. Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_g$:

$$g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax(x+1)+b(x+1)+cx}{x(x+1)} = \frac{ax^2+(a+b+c)x+b}{x^2+x}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b+c=1 \\ b=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

donc $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

B. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto f(x) = x + 2 + \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

(C) sa représentation graphique dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$

1. Étudions les variations de f

Ensemble de définition de f

$$D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{x+1} \neq 0\,;\,x+1 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-1\,;0\}$$

Dérivée de f

$$f\,'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = g(x)$$

D'après le tableau de signe de $g(x)$ de $A.\ 2°$), on a :

$\forall x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[,\ g(x)>0 \Longrightarrow f\,'(x)>0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante

$\forall x \in]-1\,;0[,\ g(x)<0 \Longrightarrow f\,'(x)<0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante

Les limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = -\infty$$

Tableau de variation

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

2. **a.** Montrons que la droite (D) d'équation $y = x+2$ est asymptote à (C).

La droite (D) d'équation $y = x+2$ est asymptote à (C) $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = 0$

$$f(x) - y = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = 0$$

et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) = 0$

Par conséquent la droite (D) d'équation $y = x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$

b. Précisons la position de (C) par rapport à (D)

Signe de $f(x) - y$

Posons : $f(x) - y \leq 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1$

Résolution de l'inéquation : $\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1$

Méthode 1

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1.$$

$$-1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{(x+1)-1}{x+1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 1 - \frac{1}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$-2 \leq -\frac{1}{x+1} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x+1} \leq 2 \Rightarrow x+1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$, alors :

$\forall x \in D_f \cap \left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[= \left[-\frac{1}{2}\,;0\right[\cup]0\,;\,+\infty[$, $f(x)-y \leq 0$, alors (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in D_f \cap \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] =]-\infty;-1[\cup \left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ $f(x)-y \geq 0$, alors (C) est au dessus de (D).

Méthode 2

$\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \leq 1^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1 \leq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+1}-1\right)\left(\frac{x}{x+1}+1\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-1}{(x+1)^2} \leq 0$

$\Rightarrow -2x-1 \leq 0$ car pour tout $x \in D_f$, $(x+1)^2 > 0$.

Tableau de signe

x	$-\infty$ $\quad -1$ $\quad\quad -1/2$ $\quad\quad 0$ $\quad +\infty$
$-2x-1$	$+$ ‖ $+$ 0 $-$ ‖ $-$

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup \left]-1;-\frac{1}{2}\right]$, $f(x)-y \geq 0$, alors (C) est au dessus de (D).

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}\,;0\right[\cup]0\,;\,+\infty[$, $f(x)-y \leq 0$, alors (C) est en dessous de (D).

c. Déterminons les coordonnées du point d'intersection de (C) et (D) puis écrivons une équation de la tangente à (C) en ce point

$(C) \cap (D)$: $f(x)=y \Rightarrow f(x)-y=0 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = 0$

$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$y = x+2 = -\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2}$ d'où $(C) \cap (D) = \left\{\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)\right\}$

Equation de la tangente au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$:

(T):$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Rightarrow y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-3\,;\,f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow y=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2} \Rightarrow y=-3x$

(T):$y=-3x$

3. Etudions le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,;\; \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,;\; \lim_{x \to \pm\infty} [f(x)-y] = 0\,;$

Alors la droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

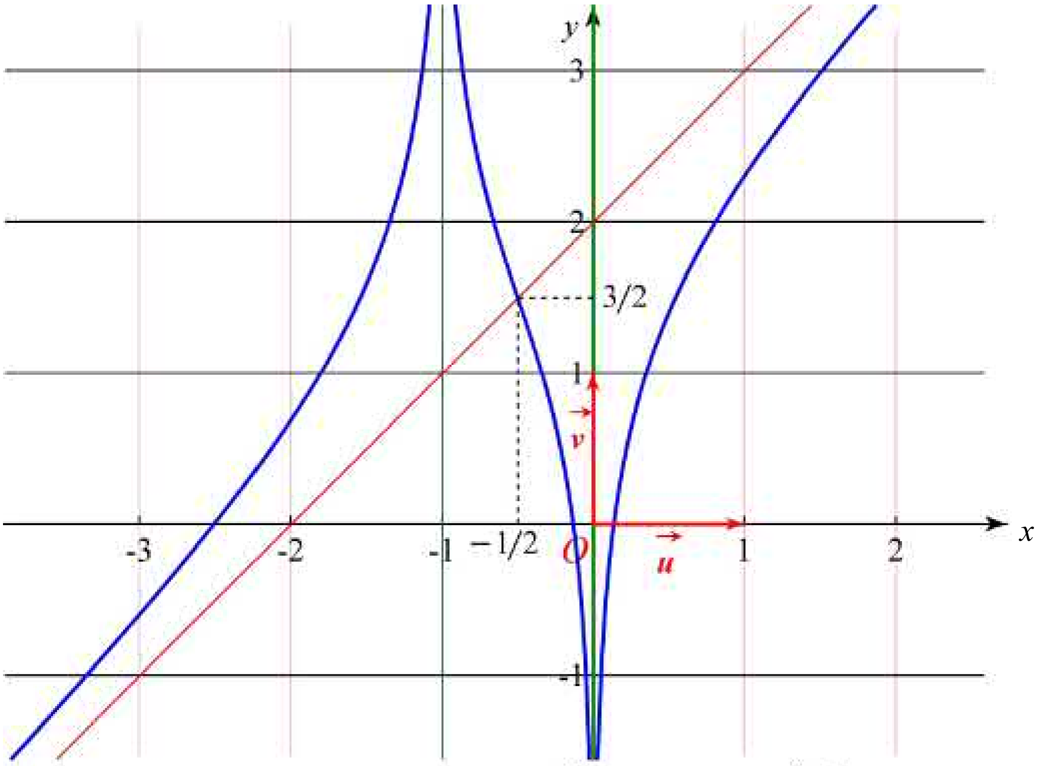
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$;

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C)

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)

4. **a.** Traçons la courbe (C) et la droite (D).



b. Précisons les points d'intersection de (C) et de la droite (D') d'équation $y = x$

$(C) \cap (D')$: $f(x) = y \Rightarrow x + 2 + \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| = x \Rightarrow \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| = -2$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| = e^{-2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} = e^{-2} \\ \dfrac{x}{x+1} = -e^{-2} \end{cases}$$

$\dfrac{x}{x+1} = e^{-2} \Rightarrow x = x.e^{-2} + e^{-2} \Rightarrow x = \dfrac{e^{-2}}{1 - e^{-2}}$

$x = \dfrac{e^{-2}}{1 - e^{-2}}$, $y = x = \dfrac{e^{-2}}{1 - e^{-2}}$,

$\dfrac{x}{x+1} = -e^{-2} \Rightarrow x = -x.e^{-2} - e^{-2} \Rightarrow x = \dfrac{-e^{-2}}{1 + e^{-2}}$

$x = \dfrac{-e^{-2}}{1 + e^{-2}}$, $y = x = \dfrac{-e^{-2}}{1 + e^{-2}}$,

$(C) \cap (D') = \left\{\left(\dfrac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} ; \dfrac{e^{-2}}{1 - e^{-2}}\right) ; \left(\dfrac{-e^{-2}}{1 + e^{-2}} ; \dfrac{-e^{-2}}{1 + e^{-2}}\right)\right\}$

5. Montrons que le point $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

Méthode 1

$A(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(C) \Leftrightarrow \ \forall x \in D_f\,;\,2a - x \in D_f$ et $f(2a-x)+f(x)=2b$

$A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(C) \Leftrightarrow f\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right)+f(x)=2\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow f(-1-x)+f(x)=3$$

$$f(x)=x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$f(-1-x)=(-1-x)+2+\ln\left|\frac{-1-x}{-1-x+1}\right|$$

$$=1-x+\ln\left|\frac{-1-x}{-x}\right|=1-x+\ln\left|\frac{1+x}{x}\right|=1-x-\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$f(-1-x)+f(x)=\left(1-x-\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)+\left(x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)=3$$

$f(-1-x)+f(x)=3$ d'où $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

Méthode 2

$A(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(C) \Leftrightarrow \ \forall x \in D_f\,;\,a - x \in D_f\,;\,a+x \in D_f$ et $f(a-x)+f(a+x)=2b$

$A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

$$\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}-x\right)+f\left(-\frac{1}{2}+x\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)=3$$

$$f(x)=x+2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$f\left(-\frac{1}{2}-x\right)=\left(-\frac{1}{2}-x\right)+2+\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-x}{-\frac{1}{2}-x+1}\right|=\frac{3}{2}-x+\ln\left|\frac{-1-2x}{1-2x}\right|$$

$$f\left(-\frac{1}{2}+x\right)=\left(-\frac{1}{2}+x\right)+2+\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}+x}{-\frac{1}{2}+x+1}\right|=\frac{3}{2}+x+\ln\left|\frac{-1+2x}{1+2x}\right|$$

$$f\left(-\frac{1}{2}-x\right)+f\left(-\frac{1}{2}+x\right)=\frac{3}{2}-x+\ln\left|\frac{-1-2x}{1-2x}\right|+\frac{3}{2}+x+\ln\left|\frac{-1+2x}{1+2x}\right|$$

$$=3+\ln\left|\left(\frac{-1-2x}{1-2x}\right)\left(\frac{-1+2x}{1+2x}\right)\right|$$

$$=3+\ln\left|\left(\frac{1+2x}{-1+2x}\right)\left(\frac{-1+2x}{1+2x}\right)\right|=3+\ln 1=3$$

$f\left(-\frac{1}{2}-x\right)+f\left(-\frac{1}{2}+x\right)=3$ d'où $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)