

Exercice 1 : (6 pts)

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.
 - a. Calcule $P(-1)$.
 - b. Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$$
 - c. Résous, dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.
 On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$
 - a. Réalise une figure et place les points A, B, C et G .
 - b. Calcule les distances AB, BC et AC . En déduis la nature du triangle ABC .
 - c. Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC .

Exercice 1 : (4 pts)

1. Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par et $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.
 - a. Calcule $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$
 - b. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x)dx$. Calcule $I_1 + I_2$ et en déduis la valeur de I_2 .
2. a. Détermine trois réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$:

$$\frac{u^2 - 1}{2u - 1} = au + b + \frac{c}{2u - 1}$$
 - b. Calcule $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx$.

Problème : (10 pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm).

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
 - a. Étudie le sens de variation de f , et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

- b. Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. a. Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f .
b. Étudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresse le tableau de variation de f .
3. a. Montre qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.
b. En déduis que \mathcal{C} admet une asymptote oblique Δ et étudie la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .
Vérifie en particulier que \mathcal{C} rencontre Δ en un point unique A .
4. Détermine les abscisses des points B et B' de \mathcal{C} admettant une tangente parallèle à Δ .
5. Vérifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.
6. Construis la courbe \mathcal{C} .

Exercice 1:

1. Pour tout nombre complexe z ; on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a. Calculons $P(-1)$

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$$

b. Déterminons les réels $a; b$ tels que, $\forall z \in \mathbb{C}$ on ait: $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

Première méthode : Tableau d'höner :

- 1 est une racine de P alors P est divisible (*factorisable*) par $z + 1$

	1	-3	3	7
-1		-1	4	-7
	1	-4	7	0

D'où $a = -4; b = 7$ alors $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

Deuxième méthode : Division euclidienne

- 1 est une racine de P alors P est divisible (*factorisable*) par $z + 1$

$$\begin{array}{r}
 z^3 - 3z^2 + 3z + 7 \\
 \underline{-z^3 - z^2} \\
 -4z^2 + 3z \\
 \underline{+4z^2 + 4z} \\
 7z + 7 \\
 \underline{-7z - 7} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 z+1 \\
 \hline
 = z^2 - 4z + 7
 \end{array} \right.$$

D'où $a = -4; b = 7$

$$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$$

Troisième méthode : Coefficients indéterminés

$P(z)$ est factorisable par $(z+1)$. Alors il existe les complexes $a; b$ tels que

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b) \Leftrightarrow P(z) = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b$$

Par identification:

$$\begin{cases} a+1 = -3 \\ a+b = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases} \quad \text{D'où } P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$$

c. Résolvons l'équation $P(z) = 0$ dans \mathbb{C}

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \Rightarrow z+1 = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$z = -1$$

$$z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 28 = -12 = 12i^2$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}; \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$$

$$S = \{-1; 2 - i\sqrt{3}; 2 + i\sqrt{3}\}$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ On désigne par $A; B; C$ et G les points du plan d'affixes respectives $Z_A = -1; Z_B = 2 + i\sqrt{3}; Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$

a. Plaçons les points $A; B; C$ et G . (*voir figure*)

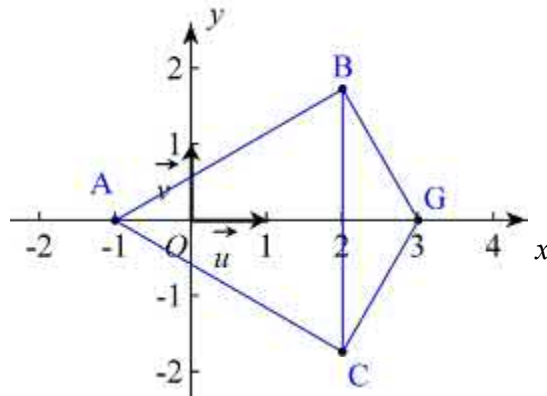
b. Calculons les distances : $AB; BC$ et AC

$$d(A, B) = |Z_B - Z_A| = |2 + i\sqrt{3} + 1| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$d(B, C) = |Z_C - Z_B| = |2 - i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$d(A, C) = |Z_C - Z_A| = |2 - i\sqrt{3} + 1| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

Le triangle ABC est équilatéral



- c. Calculons un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_G}$ puis déduisons la nature du triangle GAC

$$\frac{Z_G - Z_C}{Z_G - Z_G} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{1 + 3} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

Ainsi si θ est un argument de $\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_G}\right)$ alors $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Alors GAC est un triangle rectangle en C

Exercice 2 :

1. Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

- a. Calculons $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

- b. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$; calculons $I_1 + I_2$ et déduisons la valeur de I_2

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} - I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e}{2} \right) \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e}{2} \right)$$

Autre méthode :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$\text{Ainsi } I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \Rightarrow I_1 + I_2 = \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2. a. Déterminons trois réels a ; b ; c tels que pour tout $u \neq \frac{1}{2}$: $\frac{u^2-1}{2u-1} = au+b+\frac{c}{2u-1}$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} u^2 - 1 \\ -u^2 + \frac{1}{2}u \\ \hline \frac{1}{2}u - 1 \\ -\frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{3}{4} \end{array} & \begin{array}{l} 2u - 1 \\ \hline = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \end{array} \end{array}$$

Ainsi $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$; $c = -\frac{3}{4}$. (1pt)

- b. Calculons $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx - \frac{3}{4} \int_{-1}^0 \frac{1}{2x-1} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_{-1}^0 - \frac{3}{8} \int_{-1}^0 \frac{2}{2x-1} dx = 0 - \left[\frac{3}{8} \ln|2x-1| \right]_{-1}^0 = \frac{3}{8} \ln 3. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{2x-1} dx = \frac{3}{8} \ln 3$$

Problème :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$; et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

- a. Etudions le sens de variation de g :

Les limites aux bornes de $D_g =]-\infty; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Dérivée :

$$g'(x) = 3x^2 + 3$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Tableau de variation de g .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une unique solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

La fonction g est définie continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , alors elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Or $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

$g(-1) = 4$ et $g(-2) = -6 \Rightarrow g(-1) \times g(-2) < 0$ d'où $\alpha \in]-2; -1[$ [d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Tableau de balayage

x	-1,1	-1,2	-1,3	-1,4	-1,5	-1,6	-1,7
$g(x)$	3,27	2,67	1,90	1,06	0,13	-0,90	-2,01

d'après le théorème des valeurs intermédiaire $-1,6 < \alpha < -1,5$

b. Précisons le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Si $x \in]-\infty; \alpha[\Rightarrow g(x) < 0$

Si $x \in]\alpha; +\infty[\Rightarrow g(x) > 0$

2. $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

a. Calculons $f'(x)$ et étudions son sens de variation

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 4)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
x	-	-	0	+	
$g(x)$	-	0	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Si $x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante;

Si $x \in]\alpha; 0[\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

Si $x \in \{\alpha, 0\} \Rightarrow f'(x) = 0$ alors f est constante.

b. Étudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis dressons le tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Tableau de variation:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-4	$+\infty$	

3. a. Montrons qu'il existe quatre réels $a; b; c$ et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4 & x^2 + 1 \\ \hline -x^3 - x & = x \\ \hline -x - 4 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = x + \frac{-x - 4}{x^2 + 1}$ $a = 1; b = 0; c = -1; d = -4$.

b. Déduisons – en que \mathcal{C} admet une asymptote oblique (Δ)

Comme $f(x)$ est sous la forme $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \frac{-x-4}{x^2+1}$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

d'où $y = x$ est une asymptote oblique à \mathcal{C} .

Étudions la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique

$$f(x) - y = x + \frac{-x-4}{x^2+1} - x = \frac{-x-4}{x^2+1}$$

$x^2 + 1 > 0 \forall x \in Df$, donc $f(x) - y$ a le même signe que $-x - 4$
 $-x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

Sur $]-\infty; -4[$ $f(x) - y > 0$ d'où \mathcal{C} est au dessus de (Δ).

Sur $]-4; +\infty[$ $f(x) - y < 0$ d'où \mathcal{C} est au dessous de (Δ).

Vérifions en particulier que \mathcal{C} rencontre Δ en un point unique A

$f(x) = y$ admet -4 comme solution donc le point $A(-4; f(-4))$ est l'unique point de rencontre des deux courbes.

4. Déterminons les abscisses des points B et B' de (\mathcal{C}) admettant une tangente parallèle à (Δ): $y = x$ et (T): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$\text{Si } \Delta // T \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^4 + 3x_0^2 + 8x_0}{(x_0^2 + 1)^2} = 1 \Rightarrow x_0^4 + 3x_0^2 + 8x_0 = x_0^4 + 2x_0^2 + 1$$

$$\Rightarrow x_0^2 + 8x_0 - 1 = 0$$

$$\Delta' = 16 + 1$$

$$x_0 = -4 - \sqrt{17} \text{ ou } x_0 = -4 + \sqrt{17}$$

d'où les abscisses des points B et B' sont respectivement $x_0 = -4 - \sqrt{17}$ et $x_1 = -4 + \sqrt{17}$.

5. Vérifions que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 4}{\alpha^2 + 1} = \alpha - \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 + 1}$$

$$\alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha + 2\alpha + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 + 1) = -2(\alpha + 4)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 4 = -\frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{2}$$

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{2(\alpha^2 + 1)} = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\alpha$$

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

Déduisons-en une valeur approchée de $f(\alpha)$

$$-1,6 \leq \alpha \leq -1,5 \Leftrightarrow -2,4 \leq f(\alpha) \leq -2,25$$

6. Construction de la courbe \mathcal{C} de f .

