Ministère de l'Éducation Nationale		**République du Mali**
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation		**Un Peuple-Un But-Une Foi**
EXAMEN : Baccalauréat Général		BAC 2021
Série: Terminale Sciences Exactes (**TSE**) et Sciences et Technologie Industrielle (**STI**)		SESSION : Août 2021
Épreuve: Mathématiques	Durée: 4 heures	Coefficient: 4

Exercice 1 :________________________________6pts

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par : $p(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50$.

1) Démontre que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure noté z_0. **1,5pt**

2) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note z_1 et z_1 les solutions non imaginaire pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$. **2,5pt**

3) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on désigne par $A,\ B\ et\ C$ les points d'affixe respectives $z_0,\ z_1\ et\ z_2$.

a) Détermine l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,-1)\ ;\ (C,\ 1)\}$ puis écris z_G sous la forme exponentielle. **0,5pt**

b) Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$. **1pt**

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$? **0,5pt**

Exercice 2 :________________________________5pts

A) On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels N et N' que s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base $x+1$.

1) Ecris N et N' dans le système de base x. **1pt**

2) Ecrire $N + N'$ dans le système de base $x+1$. Déduis-en que $N + N'$ est un multiple de $x+1$. **1pt**

3) Donne, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x+1$. **0,5pt**

4) Montre qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $\overline{ab}^{x} \times \overline{aaa}^{x} = q$ **1pt**

B) Détermine tous les couples $(\alpha\ ;\ \beta)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$PGCD(\alpha\ ;\ \beta) + PPCM(\alpha\ ;\ \beta) = \beta + 9$ **1,5pt**

Problème :________________________________9pts

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $g : x \longmapsto g(x) = x - 1 - x\ln x$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_g de g puis calcule les limites de g aux bornes de D_g. **1pt**

2) g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

a) Détermine puis étudie le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**

b) Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variations. **1pt**

c) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'unité graphique :2 cm. (C) désigne la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par :

$f : x \longmapsto f(x) = |x^2 - 1| + \ln|x - 1|$, $si\ x \leq 0$ $\quad et \quad$ $f : x \longmapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $si\ \ x > 0$.

1) D_f désigne l'ensemble de définition de la fonction f.

a) Détermine D_f. **0,25pt**

b) Calcule les limites de f aux bornes de $D_{f.}$ **1pt**

2. Etude de f en -1 :

a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -1. **0,75pt**

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus. **0,25pt**

3) Détermination de la fonction dérivée, notée f', de la fonction **0,5pt**

a) Calcule $f'(x)$ pour $x \leq 0$. **0,5pt**

b) Montre que: $\forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$. Donne le sens de variation de f puis dresse son tableau de variations. **1pt**

4) Construction de la représentation graphique de f :

a) Précise les branches infinies de (C). **0,25pt**

b) Trace (C). **0,25pt**

Partie C :

1) Montre que la fonction $H : x \longmapsto -x + (x - 1)\ln|x - 1|$ est une primitive sur $]-\infty\ ;\ 1[$ de la fonction $h : x \longmapsto \ln|x - 1|$. **0,75pt**

2) Calcule l'aire A , en cm , de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ **0,5pt**

Exercice 1 : 6pts

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par : $p(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50$.

1) Démontrons que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure noté z_0.

Soit bi cette solution :

$p(z_0) = 0 \Leftrightarrow {z_0}^3 - (7+9i){z_0}^2 + (-14+39i)z_0 + 50 = 0$

$\Leftrightarrow (bi)^3 - (7+9i)(bi)^2 + (-14+39i)bi + 50 = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i + 7b^2 + 9b^2 i - 14bi - 39b + 50 = 0$

$\Leftrightarrow (7b^2 - 39b + 50) + (-b^3 + 9b^2 - 14b)i = 0$

$$\begin{cases} 7b^2 - 39b + 50 = 0 & (1) \\ -b^3 + 9b^2 - 14b = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) : 7b^2 - 39b + 50 = 0$

$\Delta = (-39)^2 - 4(7)(50) = 121 = 11^2$

$b_1 = \frac{39-11}{14} = \frac{28}{14} = 2 \quad et \quad b_1 = \frac{39+11}{14} = \frac{25}{7}$

$b = 2$ Vérifie l'équation (2). En effet : $-(2)^3 + 9(2)^2 - 14(2) = 0$

$: 8 + 36 - 24 = 0$

$: \ 0 = 0 \quad vraie$

D'où, la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure $z_0 = 2i$. 1,5pt

2) Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note $z_1 \ et \ z_1$ les solutions non imaginaire pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$.

$p(2i) = 0$. Alors il existe trois complexes $a, \ b \ et \ c$ tels que $p(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$

En utilisant la méthode d'Hörner, on a :

	1	$-7-9i$	$-14+39i$	50
$2i$		$2i$	$-14i+14$	-50
	1	$-7-7i$	$25i$	0

$Alors : \ p(x) = (z-2i)(z^2 - (7+7i)z + 25i)$

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2 - (7+7i)z + 25i) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0 \ \ ou \ \ z^2 - (7+7i)z + 25i = 0$

$* \ \ z - 2i = 0 \ \Leftrightarrow z = 2i$

$* \ \ z^2 - (7+7i)z + 25i = 0$

$\Delta = [-(7+7i)]^2 - 4(1)(25i)$

$= 49 + 98i - 48 - 100i$

$= -2i$

Déterminons $u = x + yi$ tel que : $u^2 = \Delta$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -2 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) : $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ ou \ x = -1$.

Pour $x = 1$, on a : dans (3) : $y = -1 \ \Leftrightarrow \ u_1 = 1 - i$

Pour $x = -1$, on a : dans (3) : $y = 1 \ \Leftrightarrow \ u_2 = -1 + i$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = \frac{7+7i-1+i}{2} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i \\ z_2 = \frac{7+7i+1-i}{2} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i \end{array}}$$

Alors, les complexe $u_1 = 1 - i \;\; et \;\; u_2 = -1 + i$ sont les racines carrées de Δ.

D'où $z_0 = 2i$; $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 4 + 3i$ sont les solutions de l'équation $p(z) = 0$. **2,5pt**

3) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O \; ; \; \vec{u} \; ; \; \vec{v})$, on désigne par $A, \; B \; et \; C$ les points d'affixe respectives $z_0, \; z_1 \; et \; z_2$.

a) Déterminons l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\}$

$G = Bary\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Fixons A)

$\overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow z_G - z_0 = -(z_1 - z_0) + (z_2 - z_0) \\
&\Leftrightarrow z_G - z_0 = z_2 - z_1 \\
&\Leftrightarrow z_G = z_2 - z_1 + z_0 \\
&\Leftrightarrow z_G = (4 + 3i) - (3 + 4i) + 2i \\
&\Leftrightarrow z_G = 4 + 3i - 3 - 4i + 2i \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{z_G = 1 + i}
\end{aligned}$$

D'où, l'affixe du point G barycentre du système $\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\}$ est $z_G = 1 + i$. **0,25pt**

Ecris z_G sous la forme exponentielle.

$$|z_G| = \sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_G) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \arg(z_G) = \theta = \frac{\pi}{4}$$

Alors, la forme exponentielle est $z_G = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$. **0,25pt**

b) Déterminons puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

$\sum \alpha_i \neq 0$. Alors il existe $G = bary\,\{(A, \; 1) \; ; \; (B, -1) \; ; \; (C, \; 1)\}$ $tel \; que : \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2 - MG^2 - 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} + MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + GC^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\Big(\underbrace{\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\Big) + GA^2 - GB^2 + GC^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow MG^2 = 4 - (GA^2 - GB^2 + GC^2)
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |2i - 1 - i|^2 = |-1 + i|^2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}^{\,2} = 2$$

$$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |3 + 4i - 1 - i|^2 = |2 + 3i|^2 = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}^{\,2} = 13$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |4 + 3i - 1 - i|^2 = |3 + 2i|^2 = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}^{\,2} = 13$$

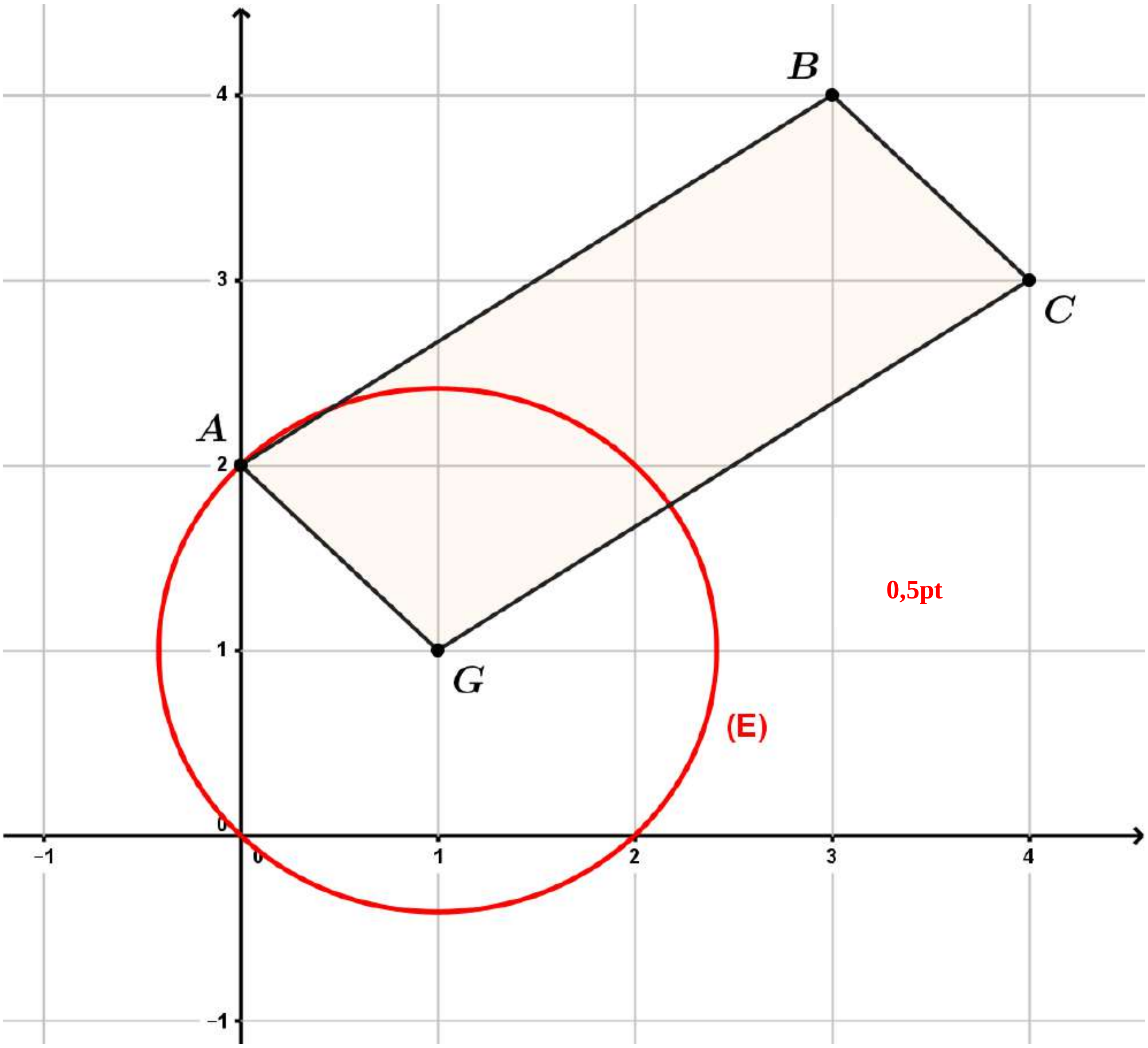
Donc :

$$\begin{aligned}
MG^2 &= 4 - (GA^2 - GB^2 + GC^2) \\
&= 4 - (2 - 13 + 13)
\end{aligned}$$

$MG^2 = 2 \Leftrightarrow MG = \sqrt{2}$

L'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$, est le cercle de centre $G(1\ ;\ 1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$. 0,5pt

Construction :



0,5pt

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$?

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 3 + 4i - 2i = 3 + 2i \\ \overrightarrow{GC} = z_C - z_G = 4 + 3i - 1 - i = 3 + 2i \end{array}\right| \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{AB}}(G) = C.$$

Alors le quadrilatère $ABCG$ est un parallélogramme 0,5pt

Exercice 2 : 5pts

A) On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels $N\ et\ N'$ que s'écrivent respectivement $\overline{100x}\ et\ \overline{x001}$ dans le système de base $x+1$.

1) Ecrivons $N\ et\ N'$ dans le système de base x.

$$\begin{aligned} N = \overline{100x}^{\,x+1} &= 1 \times (x+1)^3 + x(x+1)^0 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x \\ &= x^3 + 3x^2 + 4x + 1 \\ &= \overline{1341}^{\,x} \end{aligned}$$

D'où, $\boldsymbol{N = \overline{1341}^{\,x}}$ 0,5pt

$$\begin{aligned} N' = \overline{x001}^{\,x+1} &= x(x+1)^3 + 1(x+1)^0 \\ &= x(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 \\ &= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 \\ &= \overline{13311}^{\,x} \end{aligned}$$

D'où, $\boldsymbol{N' = \overline{13311}^{\,x}}$ 0,5pt

2) Ecrivons $N + N'$ dans le système de base $x + 1$.

$N + N' = [1 \times (x+1)^3 + x(x+1)^0] + [x(x+1)^3 + 1(x+1)^0]$

$\quad = (x+1)^3[1 + x] + (x+1)^0[x+1]$

$\quad = (x+1)^4 + (x+1)$

$\boldsymbol{N + N' = \overline{10010}^{x+1}}$ **0,5pt**

Déduisons-en que $N + N'$ est un multiple de $x + 1$.

$N + N' = (x+1)^4 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^3 + 1] = (x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$

$\boldsymbol{N + N' = K \times (x+1)}$ $\boldsymbol{avec\ \ k = x^3 + 3x^2 + 3x + 2\ \ et\ \ k \in \mathbb{N}}$**. Alors** $\boldsymbol{N + N'}$ **est un multiple de** $\boldsymbol{x+1}$**.** **0,5pt**

3) Donnons, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x + 1$.

$N + N' = K(x+1) \Leftrightarrow \frac{N+N'}{x+1} = k = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = \overline{1332}^{x}$

D'où, le quotient de la division euclidienne de $\boldsymbol{N + N'}$ **par** $\boldsymbol{x + 1}$ **est :** $\boldsymbol{q = \overline{1332}^{x}}$ **0,5pt**

4) Montrons qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $\overline{ab}^{x} \times \overline{aaa}^{x} = q$

$\overline{ab}^{x} \times \overline{aaa}^{x} = q \Leftrightarrow (ax + b)(ax^2 + ax + a) = q$

$\Leftrightarrow a^2x^3 + a^2x^2 + a^2x + abx^2 + abx + ab = q$

$\Leftrightarrow a^2x^3 + (a^2 + ab)x^2 + (a^2 + ab)x + ab = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Par identification :

$\begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 + ab = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ ab = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = 2} \end{cases}$

Alors existe deux entiers naturels $\boldsymbol{a = 1\ \ et\ \ b = 2}$ **tels que** $\boldsymbol{\overline{ab}^{x} \times \overline{aaa}^{x} = q\ \ ou\ \overline{12}^{x} \times \overline{111}^{x} = \overline{1332}^{x}}$ **1pt**

B) Déterminons tous les couples $(\alpha\ ;\ \beta)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$\boldsymbol{PGCD(\alpha\ ;\ \beta) + PPCM(\alpha\ ;\ \beta) = \beta + 9}$ (1)

Posons : $PGCD(\alpha\ ;\ \beta) = d\ \ \ et\ \ \ PPCM(\alpha\ ;\ \beta) = m$

On a : $\boldsymbol{m \times d = \alpha \times \beta}$ (2)

$PGCD(\alpha\ ;\ \beta) = d$. Alors, il existe deux entiers $\alpha'\ et\ \beta'$ premiers entre eux $(\alpha' \wedge \beta' = 1)$ tels que :

$\alpha = \alpha'd\ \ et\ \ \beta = \beta'd$

Dans (2) : $m = \frac{\alpha \times \beta}{d} = \frac{\alpha' d \times \beta' d}{d} = \alpha' \times \beta' \times d$

Dans (1) : $d + m = \beta + 9 \Leftrightarrow d + \alpha' \times \beta' \times d = \beta' d + 9$

$\Leftrightarrow d + \alpha' \times \beta' \times d - \beta' d = 9$

$\Leftrightarrow d(1 + \alpha' \times \beta' - \beta') = 9$

$\Leftrightarrow d[1 + (\alpha' - 1)\beta'] = 9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 9 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} d = 9 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 1 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} d = 3 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 3 \end{cases}$

$*$ Pour S_1 : $\begin{cases} d = 1 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 9 \end{cases}$

$1 + (\alpha' - 1)\beta' = 9 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' - 1 = 8 \\ \beta' = 1 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha' - 1 = 1 \\ \beta' = 2 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha' - 1 = 2 \\ \beta' = 4 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha' - 1 = 4 \\ \beta' = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = 9 \\ \beta' = 1 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \boldsymbol{\alpha' = 2} \\ \boldsymbol{\beta' = 2} \end{cases}$ à $\boldsymbol{rejetter}$ $ou\ \begin{cases} \alpha' = 3 \\ \beta' = 4 \end{cases}\ ou\ \begin{cases} \alpha' = 5 \\ \beta' = 2 \end{cases}$

$\boldsymbol{S_1 : (\alpha'\ ;\ \beta') = \{(9\ ;\ 1)\ \ ;\ \ (3\ ;\ 4)\ \ ;\ \ (5\ ;\ 2)\} \Leftrightarrow (\alpha\ ;\ \beta) = \{(9\ ;\ 1)\ \ ;\ \ (3\ ;\ 4)\ \ ;\ \ (5\ ;\ 2)\}}$

$*$ Pour S_2 : $\begin{cases} d = 9 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 1 \end{cases}$

$1 + (\alpha' - 1)\beta' = 1 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 0 \Leftrightarrow \alpha' - 1 = 0\ \ Car\ \ \beta \neq 0\ \ (\beta' \neq 0)$

$\Leftrightarrow \alpha' = 1$

$\boldsymbol{S_2 : (\alpha'\ ;\ \beta') = \{(1\ ;\ \beta)\} \Leftrightarrow (\alpha\ ;\ \beta) = \{(9\ ;\ 9\beta)\}}$

$*$ Pour S_3 : $\begin{cases} d = 3 \\ 1 + (\alpha' - 1)\beta' = 3 \end{cases}$

$1 + (\alpha' - 1)\beta' = 3 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' - 1 = 1 \\ \beta' = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha' - 1 = 2 \\ \beta' = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = 2 \\ \beta' = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha' = 3 \\ \beta' = 1 \end{cases}$

$\boldsymbol{S_3}$: $(\boldsymbol{\alpha'}\ ;\ \boldsymbol{\beta'}) = \{(\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{1})\} \Leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha}\ ;\ \boldsymbol{\beta}) = \{(\mathbf{9}\ ;\ \mathbf{3})\}$

$\boldsymbol{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3} = \{(\mathbf{9}\ ;\ \mathbf{1})\ ;\ (\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{4})\ ;\ (\mathbf{5}\ ;\ \mathbf{2})\ ;\ (\mathbf{9}\ ;\ \mathbf{9}\boldsymbol{\beta})\ ;\ (\mathbf{9}\ ;\ \mathbf{3})\}\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}$ **1,5pt**

Problème : 9pts

Partie A :

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par : $g: x \mapsto g(x) = x - 1 - x\ln x$.

1) Déterminons l'ensemble de définition D_g de g puis calculons les limites de g aux bornes de D_g.

- Domaine :

$\boldsymbol{D_g} =]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$ **1,5pt**

- Limites

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 - 1 - 0 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty - 1 - \infty \ \ FI$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right] = +\infty(1 - 0 - \infty) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ **0,25pt**

2) g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

a) Déterminons puis étudions le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

- Dérivée

$\forall\, x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) = 1 - \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{g'(x) = -\ln x}$ **0,25pt**

- Signe de $g'(x)$:

$\ln x \leq 0\ \ sur\ \ ]0\ ;\ 1] \Leftrightarrow -\ln x \geq 0\ \ sur\ \ ]0\ ;\ 1]$

$\ln x \geq 0\ \ sur\ \ [1\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow -\ln x \leq 0\ \ sur[1\ ;\ +\infty[$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1}]\ ;\ \ \boldsymbol{g'(x) \geq 0}$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{g'(x) \leq 0}$ **0,25pt**

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \{\mathbf{1}\}\ ;\ \ \boldsymbol{g'(x) = 0}$

b) Etudions les variations de g puis dresse son tableau de variations.

- Sens de variation :

$\forall\, x \in]0\ ;\ 1]\ ;\ \ g'(x) \geq 0$. **Alors g est croissante sur l'intervalle $]\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1}]$.**

$\forall\, x \in [1\ ;\ +\infty[\ ;\ \ g'(x) \leq 0$. **Alors g est décroissante sur l'intervalle $[\mathbf{1}\ ;\ +\infty[$.** **0,5pt**

$\forall\, x \in \{1\}\ ;\ \ g'(x) = 0$. **Alors g est constante sur l'ensemble $\{\mathbf{1}\}$.**

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ -1	↗	(0)	↘	$-\infty$

$g(1) = 0$ **0,5pt**

c) Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

D'après le tableau de variation ci-dessus :

$\forall\ \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[\ ;\ \ \boldsymbol{g(x) \leq 0}$. **0,5pt**

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'unité graphique :2 cm. (C) désigne la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par :

$f : x \longmapsto f(x) = |x^2 - 1| + \ln|x - 1|, si\ x \leq 0 \quad et \quad f : x \longmapsto f(x) = \frac{\ln x}{x-1},\ si\ \ x > 0.$

1) D_f désigne l'ensemble de définition de la fonction f.

a) Détermine D_f.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| + \ln|x - 1|, si\ x \in]-\infty\ ;\ 0] \\ \frac{\ln x}{x-1},\ si\ \ x \in]0\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

$\boldsymbol{D_f =]-\infty\ ;\ 0] \cup]0\ ;\ +\infty[- \{1\} =]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[}$ **0,25pt**

b) Calculons les limites de f aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [|x^2 - 1| + \ln|x - 1|] = +\infty + \infty = +\infty \iff \boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x - 1}\right) = 0 \times 1 = 0 \iff \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right) = \frac{\ln 0^+}{-1} = +\infty \iff \boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$ **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right) = 1 \quad et \quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right) = 1$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1.}$ **0,25pt**

2. Etude de f en -1 :

a) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en -1.

\- Continuité de f en -1 :

Sur $]-\infty\ ;\ 0]$, écrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

$x^2 - 1 = 0 \iff x = 1\ \ ou\ \ x = -1$

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert x^2 - 1\rvert$	$x^2 - 1$		$-x^2 + 1$		$-x^2 + 1$		$x^2 - 1$	

Sur $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f(x) = x^2 - 1 + \ln|x - 1|}$

Sur $\boldsymbol{]-1\ ;\ 0]\ ;\ f(x) = x^2 - 1 + \ln|x - 1|}$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} (x^2 - 1 + \ln|x - 1|) = 1 - 1 + \ln|-2| = \ln 2$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} (-x^2 + 1 + \ln|x - 1|) = -1 + 1 + \ln|-2| = \ln 2$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x).\ Alors\ f\ est\ continue\ en - 1.}$ **0,25pt**

\- Dérivabilité de f en -1 :

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to-1^+} \left(\frac{x^2 - 1 + \ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right) = \lim_{x\to-1^+} \left((x - 1) + \frac{\ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-1^+} (x - 1) + \lim_{x\to-1^+} \left(\frac{\ln|x-1|-\ln 2}{x+1}\right)$$

$$= (-1 - 1) + p'(-1) \quad où\ \ p(x) = \ln|x - 1|\ \ et\ \ p'(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\frac{5}{2}.\ Alors\ f\ dérivable\ à\ droite\ de - 1}$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to-1^-} \left(\frac{-x^2 + 1 + \ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right) = \lim_{x\to-1^-} \left(-(x - 1) + \frac{\ln|x - 1| - \ln 2}{x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-1^-} (-x + 1) + \lim_{x\to-1^-} \left(\frac{\ln|x-1|-\ln 2}{x+1}\right)$$

$$= (-(-1)+1) + p'(-1) \quad \text{où} \quad p(x) = \ln|x-1| \quad et \quad p'(x) = \frac{1}{x-1}$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$\displaystyle \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{3}{2}$. ***Alors f dérivable à gauche de −1***

$\displaystyle \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. ***Alors f n'est pas dérivable en −1.*** **0,5pt**

b) Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus.

$\displaystyle \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. ***Alors (C) admet deux demi tangentes obliques en −1.***

d'équation (T_d) : $y = \frac{3}{2}(x+1) + \ln 2$ ***et*** (T_g) : $y = -\frac{5}{2}(x+1) + \ln 2$ **0,25pt**

Autrement dit, le point d'abscisse $x_0 = -1$ est un point anguleux.

3) Détermination de la fonction dérivée, notée f', de la fonction

a) Calculons $f'(x)$ pour $x \leq 0$.

$\forall\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f'(x) = 2x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

$\forall\ x \in]-1\ ;\ 0[\ ;\ f'(x) = -2x + \frac{1}{x-1} = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1}$

Pour $x \leq 0$, $\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1} & si\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1} & si\ x \in]-1\ ;\ 0[\end{cases}$ **0,5pt**

b) Montrons que: $\forall\ x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$.

$\forall\ x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*\ ;\ f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

D'où, pour tout $x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$ **0,5pt**

- Donnons le sens de variation de f puis dressons son tableau de variations.

$$Posons : \begin{cases} \forall\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f_1{}'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1} \\ \forall\ x \in]-1\ ;\ 0[\ ; f_2{}'(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1} \\ \forall\ x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[\ ;\ f_3{}'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2} \end{cases}$$

$*\ \ \forall\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\ ;\ f_1{}'(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$

Posons: $2x^2 - 2x + 1 = 0$; $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin]-1\ ;\ 0[$

$\Delta' = 1 - 2(1) = -1 < 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x^2-2x+1$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_2{}'(x)$		$-$		$-$		$-$		$+$	

$*\ \ \forall\ x \in]-1\ ;\ 0[\ ; f_2{}'(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{x-1}$

Posons : $-2x^2 + 2x + 1 = 0\ \ et\ \ x - 1 = 0$

$-2x^2 + 2x + 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\Delta' = 1 + 2 = 3$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{-2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{-2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_1'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$+$		$-$	

$*\quad \forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*\ ;\ f_3'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

$\forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[\ ; x(x-1)^2 > 0.$ *Le signe de* f' *dépend de celui de* $g(x)$.

D'après partie A) c) ; $\forall\ x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\quad g(x) \leq 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f_3'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	

- Tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	

- Sens de variation :

$f'(x) \leq 0$ *sur* $]-\infty\ ;\ -1[\cup \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0\right] \cup]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, alors :

$\boldsymbol{f}$ ***est décroissante sur*** $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ -1[\cup \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0\right] \cup]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[}$.

$f'(x) \geq 0$ *sur* $\left]-1\ ;\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$, alors : **0,25pt**

$\boldsymbol{f}$ ***est croissante sur*** $\boldsymbol{\left]-1\ ;\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]}$

- Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{5}{2}\ \vert\ \frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$(1{,}18)$	$\searrow$	$1\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$1\ \Vert\ 1$	$\searrow$	0

0,25pt

$f(-1) = \ln 2\quad et\quad f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}18$

4) Construction de la représentation graphique de f :

a) Précisons les branches infinies de (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$ *Il y a possibilité d'asymptoteoblique*

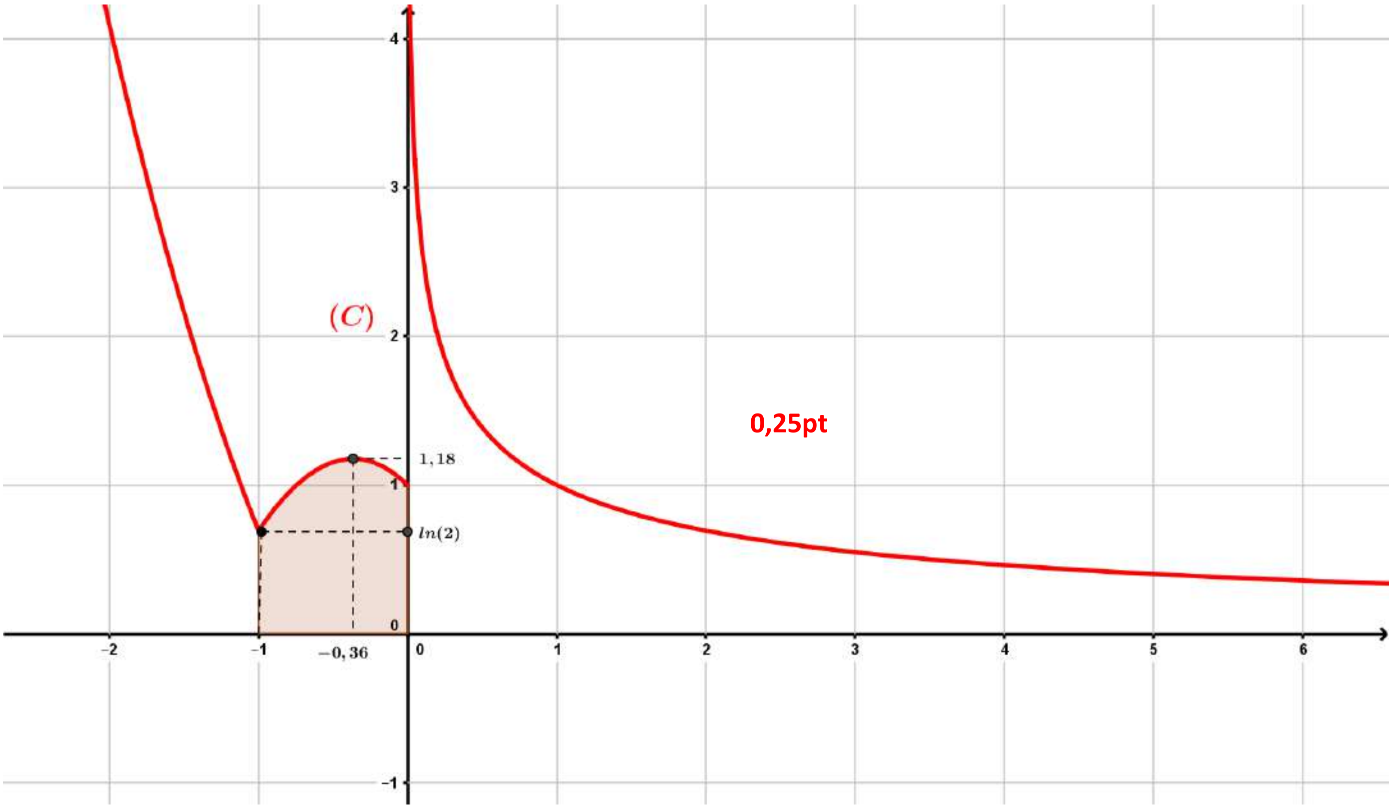
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-1+\ln|x-1|}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{x} + \frac{\ln|x-1|}{x}\right) = -\infty$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$. ***Alors la courbe*** $\boldsymbol{(C)}$ ***admet une branche parabolique de direction*** **0,25pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *alors la courbe* (C) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. *alors la courbe* (C) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = 0$

b) Trace (C).



0,25pt

Partie C :

1) Montrons que la fonction $H : x \longmapsto -x + (x-1)\ln|x-1|$ est une primitive sur $]-\infty\ ;\ 1[$ de la fonction $h : x \longmapsto \ln|x-1|$.

$H'(x) = -1 + \left[\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} \times (x-1)\right] = -1 + \ln|x-1| + 1 = \ln|x-1|$

$\boldsymbol{H'(x) = \ln|x-1| = h(x)}$. **Alors H est une primitive de h.** 0,75pt

2) Calcule l'aire A , en cm , de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx.ua$

$\forall\ x \in [-1\ ;\ 0]\ ;\ f(x) = -x^2 + 1 + \ln|x-1|$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x^2 + 1 + \ln|x-1|)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x^2+1)dx + \int_{-1}^{0}\ln|x-1|\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{0} + [-x + (x-1)\ln|x-1|]_{-1}^{0}$

$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right) - (1 - 2\ln 2)$

$= -\frac{1}{3} + 2\ln 2$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{6\ln 2 - 1}{3}$

$\boldsymbol{A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx.ua = \frac{6\ln 2-1}{3} \times 4\ cm^2 = \frac{24\ln 2 - 4}{3}}$ Valeur exacte 0,5pt

$\boldsymbol{A = 4,21\ cm^2}$ Valeur approchée de A à 10^{-2} près.