

Série : TAL - Énoncé.

Exercice 1 5 points

1. Trouve tous les diviseurs de : 36 ; 45 ; 55 ; 100.
2. Trouve trois multiples de chacun des entiers : 5 ; 6 ; 7 ; 8
3. Détermine le PGCD et le PPCM des entiers suivants :
 - a. 3 et 2
 - b. 84 et 36
 - c. 104 et 26

Exercice 2 5 points

1. Calcule les limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + x - 6}{x^2 - 4} ; \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 3) ; \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x^2 - x + 2}$$

2. Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$\text{a. } f(x) = (x^3 - x + 1)^2 ; \quad \text{b. } f(x) = (3 - x^2)(x + 3) ; \quad \text{c. } f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{5 - x}$$

Problème 10 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

1. Précise le domaine de définition de f .
2. Détermine la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$;
3. Étudie le signe de $f'(x)$ puis déduis-en le sens de variation de f .
4. Dresse le tableau des variations de f .
5. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f en son point d'abscisse $x = 1$;
6. Trace la courbe (C) de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
7. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, f modélise le prix de vente, de x objets, exprimé en dizaine d'unités et $f(x)$ exprimé en milliers de francs CFA.
8.
 - a. Détermine le prix de vente d'une dizaine d'objets, puis de 20 objets ;
 - b. Pour quelle valeur de x , le prix est-il maximal? Quel est ce maximum ?
 - c. Détermine graphiquement à partir de quel nombre d'objets la production est une perte.

Exercice 1 : **5 points****1.** Trouvons tous les diviseurs de : 36 ; 45 ; 55 ; 100

$$\begin{array}{r|l} 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ & 9 \\ & 3 \\ & 3 \\ & 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$36 = 2^2 \times 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ 1 & 5 \\ & 5 \\ & 1 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

$45 = 3^2 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & 1 \\ & 1 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

$55 = 5 \times 11$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 0 & 0 \\ & 5 & 0 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

$100 = 2^2 \times 5^2$

$\times$	2^0	2^1	2^2
3^0	1	2	4
3^1	3	6	12
3^2	9	18	36

$D_{36} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$

$\times$	3^0	3^1	3^2
5^0	1	3	9
5^1	5	15	45

$D_{45} = \{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45\}$

$\times$	5^0	5^1
11^0	1	5
11^1	11	55

$D_{55} = \{1 ; 5 ; 11 ; 55\}$

$\times$	2^0	2^1	2^2
5^0	1	2	4
5^1	5	10	20
5^2	25	50	100

$D_{100} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 50 ; 100\}$

2. Trouvons trois multiples de chacun des entiers : 5 ; 6 ; 7 ; 8

$M_5 = \{5 ; 10 ; 15\} ; M_6 = \{6 ; 12 ; 18\} ; M_7 = \{7 ; 14 ; 21\} ; M_8 = \{8 ; 16 ; 32\}$

3. Trouvons le PGCD et le PPMC des entiers suivants:

a. $PGCD(3; 2) = 1 ; PPMC(3; 2) = 2 \times 3 = 6$

b. $84 = 2^2 \times 3 \times 7 ; 36 = 2^2 \times 3^2$

$PGCD(84; 36) = 2^2 \times 3 = 12 ; PPMC(84; 36) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$

c. $104 = 2^3 \times 13 ; 26 = 2 \times 13$

$PGCD(104; 26) = 2 \times 13 = 26 ; PPMC(104; 26) = 2^3 \times 13 = 104$

Exercice 2 : 5 points

1. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{2^3 - 2^2 + 2 - 6}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}$; on a une forme indéterminée.

Levons l'indétermination

	1	-1	1	-6
2		2	2	6
	1	1	3	0

$$x^3 - x^2 + x - 6 = (x - 2)(x^2 + x + 3)$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + x - 6}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x + 3)}{(x + 2)} = \frac{2^2 + 2 + 3}{2 + 2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{9}{4}$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 3) = +\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{x^2 - x + 2} = 0$

2. Calculons la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (x^3 - x + 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(3x^2 - 1)(x^3 - x + 1)$

b. $f(x) = (3 - x^2)(x + 3) \Rightarrow f'(x) = -2x(x + 3) + (1)(3 - x^2)$

$$= -2x^2 - 6x + 3 - x^2 = -3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(x) = f'(x) = -3x^2 - 6x + 3$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{5 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x - 1)(5 - x) - (-1)(2x^2 - x + 3)}{(5 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{20x - 4x^2 - 5 + x + 2x^2 - x + 3}{(5-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 20x - 2}{(5-x)^2}$$

Problème : **10 points** ✍

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

1. Précisons le domaine de définition de f

f est une fonction polynôme $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2. Déterminons la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[f'(x) < 0$, f est strictement décroissante

$\forall x \in]0 ; 2[f'(x) > 0$, f est strictement croissante

4. Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	4	$-\infty$	

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty ; \end{aligned}$$

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$f(0) = 0 ; f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 = 4$$

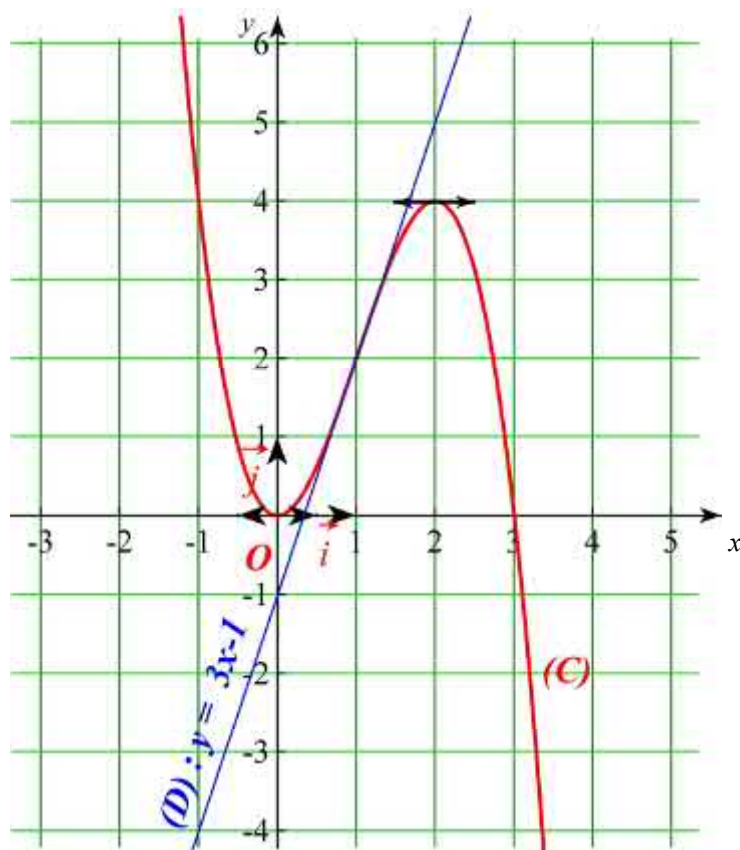
5. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f en son point d'abscisse $x_0 = 1$

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$f'(1) = -3(1)^2 + 6(1) = 3 ; f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 = 2$$

$$y = 3(x - 1) + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1 ; (T) : y = 3x - 1$$

6. Traçons (C) de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.



7. Sur $[0 ; +\infty[$ f modélise le prix de vente de x objets exprimé en dizaine d'unités et $f(x)$ est exprimée en milliers de francs CFA

- a. Déterminons le prix de vente d'une dizaine d'objets, puis de 20 objets
 Prix de vente d'une dizaine d'objets : $x = 1$

$$f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 = 2 ; \text{ le prix de vente d'une dizaine d'objets est } 2\,000\text{F}$$

$$\text{Prix de vente de 20 objets : } x = 2$$

$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 = 4$; le prix de vente de vingt objets est 4 000F

- b.** La valeur de x pour laquelle le prix est maximal.

Le prix est maximal pour $x = 2$; le maximum est 4 , c'est à dire 4 000 F

- c.** Déterminons graphiquement le nombre d'objets à partir duquel la production est une perte

La production est une perte si f prend des valeurs négatives, et cela se produit à partir de $x = 3$, c'est à dire à partir de 30 objets.