Correction bac 2020 - Série C

Exercice 1

1

$$\begin{aligned} 2x - 7y = 3 &\iff 2x - 3 = 7y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 2x - 3 \text{ est un multiple de } 7 \\ &\iff 2x - 3 \equiv 0\,[7] \\ &\iff 2x \equiv 3\,[7] \end{aligned}$$

D'où les équations (E_0) et (E_1) sont équivalentes.

2 Déterminons d'abord une solution particulière de l'équation $2x \equiv 3\,[7]$

2 et -7 étant premiers entre eux, déterminons $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $2u - 7v = 1$.
De l'égalité $7 = 2 \times 3 + 1$, on en déduit que $2 \times (-3) - 7 \times (-1) = 1$.
En multipliant membre à membre l'égalité précédente par 3, on obtient : $2 \times (-9) - 7 \times (-3) = 3$.
On en déduit que $(-9, -3)$ est une solution particulière de (E_1) et on a $2 \times (-9) \equiv 3\,[7]$.

Déterminons l'ensemble de solutions de l'équation (E_1)

$$\begin{cases} 2x \equiv 3\,[7] \\ 2 \times (-9) \equiv 3\,[7] \end{cases} \iff 2x \equiv 2 \times (-9)\,[7] \iff 2(x+9) \equiv 0\,[7] \iff 7 \text{ divise } 2(x+9).$$

Comme 7 est premier avec 2, alors d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x + 9$.
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 9 = 7k$. D'où $x = -9 + 7k$.
Les solutions de l'équation (E_1) sont l'ensemble $\{-9 + 7k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3 En remplaçant x par $-9+7k$ dans l'équation (E_0) : $2x-7y = 3$, on obtient : $y = -3+2k$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est l'ensemble $\{(-9 + 7k\,,\ -3 + 2k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4 **a.** $A = \{1\,;\,5\,;\,19\,;\,95\}$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système : $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Comme $2x - 7y = 3$, alors $2x - 7y > 0$. Donc $x > y$.

En utilisant 4. a., on en déduit que les solutions (x, y) de l'équation $xy = 95$ vérifiant $x > y$ appartiennent à l'ensemble : $I = \Big\{(95, 1)\,,\ (-1, -95)\,,\ (-5, -19)\,,\ (19, 5)\Big\}$.

Déterminons le couple $(x, y) \in I$ solution de l'équation $2x - 7y = 3$

- $2 \times 95 - 7 \times 1 \neq 3$. Donc $(95, 1)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times (-1) - 7 \times (-95) \neq 3$. Donc $(-1, -95)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times (-5) - 7 \times (-19) \neq 3$. Donc $(-5, -19)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times 19 - 7 \times 5 = 3$. Donc $(19, 5)$ est solution de l'équation $2x - 7y = 3$.

D'où $(19, 5)$ est le seul couple solution du système $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

<u>Autre méthode</u>

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système : $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

(x, y) vérifie $2x - 7y = 3$. D'après 3., (x, y) est de la forme $(-9 + 7k\,,\ -3 + 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Et, $(-9 + 7k\,,\ -3 + 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ vérifie $xy = 95$ si $(-9 + 7k)(-3 + 2k) = 95$ ou encore $14k^2 - 39k - 68 = 0$.

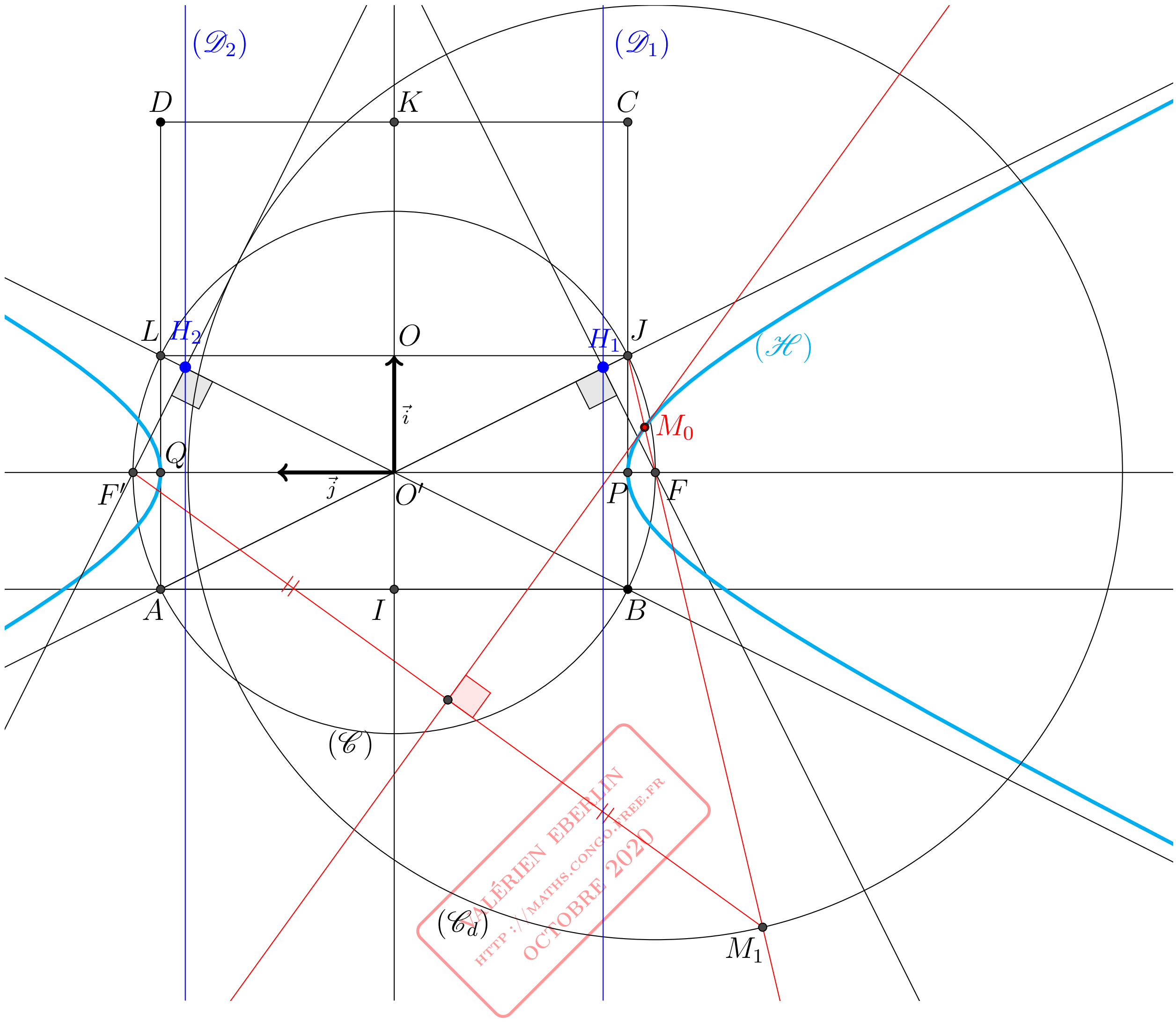
L'équation $14k^2 - 39k - 68 = 0$ admet dans $\mathbb{Z}$ une seule solution $k = 4$.

En remplaçant k par 4 dans $(-9+7k\,,\ -3+2k)$, on a $(-9+7\times4, -3+2\times4) = (19, 5)$.

Donc $(19, 5)$ est le seul couple solution du système $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Exercice 2

1



2 **a.** Déterminons le vecteur $\overrightarrow{u}$

$f(D) = I$.

$f(D) = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(OL)}(D) = t_{\overrightarrow{u}}(A)$.

On en déduit que $t_{\overrightarrow{u}}(A) = I$. D'où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AI}$.

b. Déterminons $f(K)$

$f(K) = t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{(OL)}(K) = t_{\overrightarrow{AI}}(I) = B$.

3 **a.** Les asymptotes de $(\mathscr{H})$ sont les droites (AJ) et (BL).

b. Les foyers sont les points d'intersection du cercle fondamental (cercle de centre O' et de rayon $O'J$) et de l'axe focal (PQ).

c. P et Q sont les sommets de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

d. Le projeté orthogonal H_1 du foyer F sur la diagonale $[AJ]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associé au foyer F.

D'où $(\mathscr{D}_1)$ est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_1.

De même, le projeté orthogonal H_2 du foyer F' sur la diagonale $[LB]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associé au foyer F'.

D'où $(\mathscr{D}_2)$ est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_2.

e. Soit M_1 le point d'intersection de la demi-droite $[JF)$ et du cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$ associé à F (cercle de centre F et de rayon $2 \times O'P$).

Alors, M_0 est le point d'intersection de la médiatrice de $[F'M_1]$ et du segment $[FJ]$.

En effet,

$M_0F' - M_0F = M_0M_1 - M_0F = FM_1 = 2 \times O'P$. Ce qui prouve que $M_0 \in (\mathscr{H})$.

f. $O'P = 3$ et $O'J = \sqrt{OP^2 + PJ^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$.

D'où l'excentricité $e = \dfrac{O'J}{O'P} = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

g. Voir figure.

4 **a.** $(O', \vec{j})$ et $(O', \vec{i})$ étant respectivement l'axe focal et l'axe non focal de $(\mathscr{H})$, on en déduit que l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$ est : $-\dfrac{x^2}{O'O^2} + \dfrac{y^2}{O'Q^2} = 1$.

Or $O'O = \|\vec{i}\| = 1$ et $O'Q = 2 \times \|\vec{j}\| = 2$.

D'où l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$: $-\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ ou encore $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = -1$.

b. Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathscr{H})$ et H le projeté orthogonal de M sur la directrice $(\mathscr{D}_1)$ associé à F.

Montrons que $\frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

De l'équation $(\mathscr{H})$: $-\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$, on en déduit que l'hyperbole $(\mathscr{H})$:

- a pour sommets les points : $Q(0, 2)$, $P(0, -2)$;
- a pour foyers les points : $F'(0, \sqrt{5})$, $F(0, -\sqrt{5})$;
- pour directrices, les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives $y = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR OCTOBRE 2020

H a pour coordonnées : $H(x, -\frac{4}{\sqrt{5}})$.

$$\text{On a : } \quad MF^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 MH^2 = x^2 + (y+\sqrt{5})^2 - \frac{5}{4}\left(y + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= x^2 + y^2 + 2\sqrt{5}y + 5 - \frac{5}{4}\left(y^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}y + \frac{16}{5}\right).$$
$$= x^2 - \frac{y^2}{4} + 1$$
$$= 0$$

On en déduit que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Donc l'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3

1 **a.** f' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall\, x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{x^2-4}{2x} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{2x}$.

b. f' est du signe de la fonction : $x \mapsto x-2$ sur $]0;+\infty[$.

Limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\dfrac{1}{4} - 2\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{2\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4} - 2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

c. $f(3) \approx -0,197$ et $f(4) \approx 0,977$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]3;4[$.

De plus $f(3).f(4) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [3;4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
OCTOBRE 2020

2 **a.** Remarquons d'abord que si $x \geq 3$, $\;8\ln x + 1 > 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \frac{x^2-1}{4}=2\ln x \\ &\iff x^2=8\ln x+1 \\ &\iff x=\sqrt{8\ln x+1} \quad (\text{le cas } x=-\sqrt{8\ln x+1} \text{ est impossible car } x\geq 3) \end{aligned}$$

D'où les équations $f(x)=0$ et $g(x)=x$ sont équivalentes sur $[3;+\infty[$.

b. g est continue et dérivable sur $[3\,;\,4]$.
De plus, $|g'(x)|\leq \frac{4}{9}$ pour tout $x\in[3;4]$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall\, x\in[3;4],\ \forall\, y\in[3;4],\ |g(x)-g(y)|\leq\frac{4}{9}|x-y|$$

Comme $\alpha \in [3;4]$, on peut appliquer l'inégalité précédente en x quelconque où $x\in[3;4]$ et en $y=\alpha$.
On a alors :

$$\forall\, x\in[3;4],\ |g(x)-g(\alpha)|\leq\frac{4}{9}|x-\alpha|$$

Or d'après 2. a., $g(\alpha)=\alpha$. Il en résulte que : $\forall\, x\in[3;4],\ |g(x)-\alpha|\leq\frac{4}{9}|x-\alpha|$.

3 **a.** Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n\in[3;4]$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
Initialisation
$u_0=3\in[3;4]$.
Comme $u_0\in[3;4]$, alors d'après 2. b., $u_1=g(u_0)\in[3;4]$.
Les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vérifiées.
Hérédité
Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que : $u_n\in[3;4]$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $u_{n+1}\in[3;4]$.
On a $u_n\in[3;4]$.
On en déduit d'après 2. b., que $g(u_n)\in[3;4]$.
Or $g(u_n)=u_{n+1}$. D'où $u_{n+1}\in[3;4]$.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Conclusion
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$.
On peut appliquer l'inégalité obtenue en 2.b., en $x=u_n$ (car $u_n\in I$).
On a alors :

$$|g(u_n)-\alpha|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$$

Or $g(u_n)=u_{n+1}$. Il en résulte que $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c. Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
Initialisation
Comme $3\leq\alpha\leq 4$, alors $-1\leq u_0-\alpha\leq 0$ donc $|u_0-\alpha|\leq 1=\left(\frac{4}{9}\right)^0$.

La propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.

<u>Hérédité</u>

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

D'après 3. b. $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n-\alpha|$, et par hypothèse de récurrence, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Ainsi, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

<u>Conclusion</u>

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2}$.

Par croissance de la fonction logarithme, on a : $n \ln \frac{4}{9} \leq -2\ln 10$.

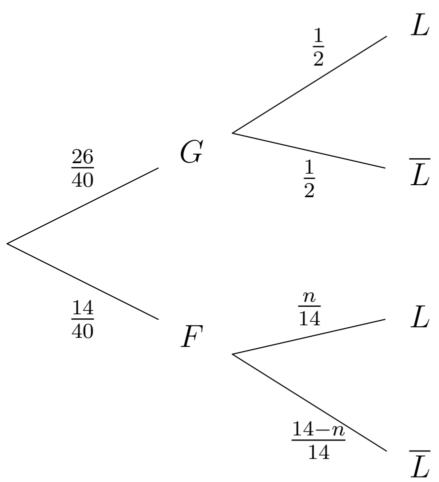
D'où $n \geq \dfrac{2\ln 10}{\ln 9 - \ln 4}$ $(\approx 5,67)$.

Donc $n_0 = 6$.

Exercice 4

1 $P(G) = \dfrac{26}{40}$; $P(F) = \dfrac{14}{40}$.

2



3 <u>Première solution</u>

13 garçons et n filles sur un effectif total de 40 élèves sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues.

Donc la probabilité L qu'une personne choisie soit inscrite dans un centre d'apprentissage de langues est de $\dfrac{13+n}{40}$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR OCTOBRE 2020

Seconde solution

D'après l'arbre réalisé en 2., on en déduit que :

$P(L) = \dfrac{26}{40} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{14}{40} \times \dfrac{n}{14} = \dfrac{13+n}{40}$.

4

$$\begin{aligned}\text{Les événements } L \text{ et } G \text{ sont indépendants} &\iff P_G(L) = P(L)\\ &\iff \frac{1}{2} = \frac{13+n}{40}\\ &\iff n = 7\end{aligned}$$