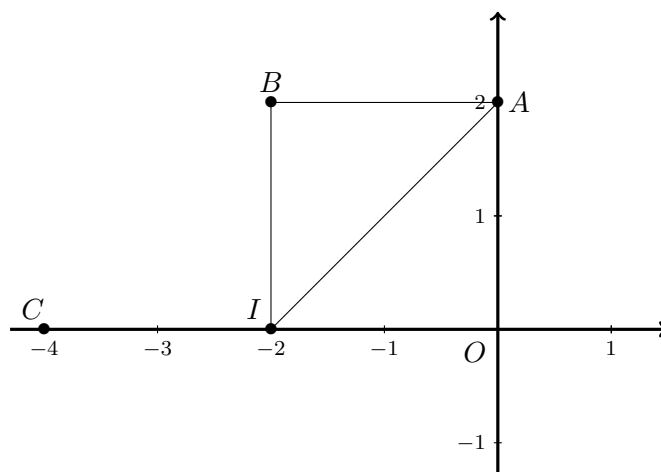


Correction bac 2016 - Série D

Exercice 1

- 1** $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. D'où $z' = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z$.
 L'application S est de la forme $z' - z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_0)$.
 C'est donc une similitude plane directe de centre $z_0 = 0$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- 2** Les affixes z_B et z_C des points B et C sont respectivement donnés par :
 $z_B = (1 + i) \times 2i = -2 + 2i$.
 $z_C = (1 + i)(-2 + 2i) = -4$.
- 3**



- 4** I a pour affixe : $z_I = \frac{z_O + z_C}{2} = -2$.
 $|z_A - z_B| = 2$ et $|z_I - z_B| = 2$. On en déduit que $BA = BI$.
 De plus, $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_I - z_B}\right) [2\pi] = \arg(i) [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On en déduit que $(BI) \perp (BA)$.
 Par conséquent, le triangle ABI est rectangle isocèle en B .
- 5** z_A , z_B et z_C annule le polynôme $(z - z_A)(z - z_B)(z - z_C)$.

$$\begin{aligned} (z - z_A)(z - z_B)(z - z_C) &= (z - 2i)(z + 4)(z + 2 - 2i) \\ &= [z^2 + (4 - 2i)z - 8i](z + 2 - 2i) \\ &= z^3 + [(2 - 2i) + (4 - 2i)]z^2 + [(4 - 2i)(2 - 2i) - 8i]z - 8i(2 - 2i) \\ &= z^3 + (6 - 4i)z^2 + (-20i + 4)z - 16i - 16 \end{aligned}$$

Exercice 2

1 Calculons $f(\vec{i})$

$$f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}. \text{ On en déduit que : } \vec{i} = \frac{1}{3}f(\vec{j}) + \frac{2}{3}\vec{j}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(\vec{i}) &= f\left(\frac{1}{3}f(\vec{j}) + \frac{2}{3}\vec{j}\right) \\ &= \frac{1}{3}f^2(\vec{j}) + \frac{2}{3}f(\vec{j}) \text{ car } f \text{ est un endomorphisme sur } \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}(3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= 2\vec{i} - \vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

Calculons $f \circ f(\vec{i})$

$$\begin{aligned} f(f(\vec{i})) &= f(2\vec{i} - \vec{j}) \\ f \circ f(\vec{i}) &= 2f(\vec{i}) - f(\vec{j}) \\ &= 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} \end{aligned}$$

2 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\text{De plus, } f \circ f(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}.$$

On en déduit que f est une symétrie vectorielle.

3 a. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

b. Comme $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$, on en déduit que $f^{-1} = f$ et par conséquent f est bijectif.

D'où f est un automorphisme involutif.

c. Déterminons d'abord l'expression analytique de f .

Soit $M = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $M'(x', y')$ son image par f . Alors,

$$\begin{aligned} f(x\vec{i} + y\vec{j}) &= x'\vec{i} + y'\vec{j} \iff xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff x(2\vec{i} - \vec{j}) + y(3\vec{i} - 2\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff (2x + 3y)\vec{i} + (-x - 2y)\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{D'où l'expression analytique de } f : \begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

Base de f

La base de f est l'ensemble : $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

Soit $\vec{u}(x, y)$ un élément de la base de f .

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -x - 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -x - 2y = y \end{cases}$$

La base de f est la droite vectoriel d'équation $x + 3y = 0$, engendrée par le vecteur $(-3, 1)$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble : $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$.

Soit $\vec{u}(x, y)$ un élément de la direction de f .

$$f(\vec{u}) = -\vec{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = -x \\ -x - 2y = -y \end{cases} \iff x + y = 0.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$, engendrée par le vecteur $(-1, 1)$.

4 a. $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Comme le déterminant de la famille $\mathcal{B}' = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b.

Du système d'équations : $\begin{cases} 2\vec{i} - \vec{j} = \vec{u} \\ -3\vec{i} + \vec{j} = \vec{v} \end{cases}$, on en déduit que $\vec{i} = -\vec{u} - \vec{v}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(\vec{u}) &= f(2\vec{i} - \vec{j}) \\ &= 2f(\vec{i}) - f(\vec{j}) \\ &= 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} \\ &= -\vec{u} - \vec{v} \end{aligned}$$

D'autre part, le calcul direct de $f(\vec{v})$ donne :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(-3\vec{i} + \vec{j}) \\ &= -3f(\vec{i}) + f(\vec{j}) \\ &= -3(2\vec{i} - \vec{j}) + (3\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= -3\vec{i} + \vec{j} \\ &= \vec{v} \end{aligned}$$

Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{u} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{v} \end{matrix} \end{array}$$

Exercice 3

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2 Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, alors la courbe ($\mathcal{C}$) de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, alors la courbe ($\mathcal{C}$) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

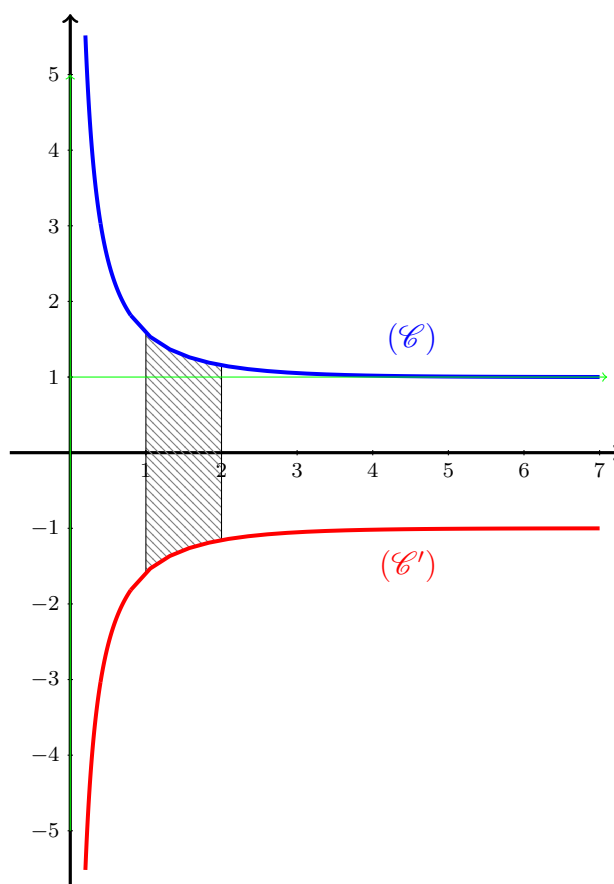
3 a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}.$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$	$+\infty$	1

4



5 Voir figure ci-dessous.

$$6 \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = 2 [\ln(e^x - 1)]_1^2 = 2 \ln(e + 1) \text{ u.a} = 2 \ln(e + 1) \text{ cm}^2$$

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X , et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y .

Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N .

1Loi marginale de X .

X	-1	1	2
$n_{i\bullet}$	$m+2$	3	$n+5$

Loi marginale de Y .

Y	0	1	2
$n_{\bullet j}$	4	$m+3$	$n+3$

2

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i = \frac{(m+2) \times (-1) + 3 \times 1 + (n+5) \times 2}{m+n+10} = \frac{-m+2n+11}{m+n+10}.$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^3 n_{\bullet j} y_j = \frac{4 \times 0 + (m+3) \times 1 + (n+3) \times 2}{m+n+10} = \frac{m+2n+9}{m+n+10}.$$

Les coordonnées du point moyen $(\bar{X}, \bar{Y})$ en fonction de m et n vérifient :

$$\frac{-m+2n+11}{m+n+10} = 1 \text{ et } \frac{m+2n+9}{m+n+10} = 1. \text{ D'où } n = 1 \text{ et } m = 1.$$

3**a.** L'équation de régression linéaire de Y en X est donnée par l'équation : $Y = aX + b$

$$\text{où } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}.$$

$$\text{Les calculs de } a \text{ et } b \text{ donnent : } a = \frac{-1}{\frac{12}{1}} = -\frac{1}{6} ; \quad b = 1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}.$$

$$\text{D'où l'équation de la droite de régression linéaire } Y = -\frac{1}{6}X + \frac{7}{6}.$$

b. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{6}}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

