Correction bac 2013 - Série D

Exercice 1

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	6	8	5

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	9	6	4

2 $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i = \frac{6\times(-2)+8\times(-1)+5\times 0}{19} = -\frac{20}{19}$.

$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}y_j = \frac{9\times(-1)+6\times 0+4\times 2}{19} = \frac{-1}{19}$.

Le point moyen a pour coordonnées $G\left(-\frac{20}{19}, -\frac{1}{19}\right)$.

3 L'équation de régression linéaire de Y en X est donnée par l'équation :

$Y = aX + b$ où $a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y} \quad \text{où } n_{ij} \text{ est le coefficient associé au couple } (x_i, y_j)$$

$$= \frac{8+0-8+3+0+0+0+0+0}{19} - \frac{20}{19^2} = \frac{37}{361}$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}\,x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{6(-2)^2+8\times(-1)^2+5\times 0^2}{19} - \left(-\frac{20}{19}\right)^2 = \frac{208}{361}$$

Ainsi, $a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} = \frac{37}{208}$ et $b = \frac{-1}{19} - \frac{37}{208}\times\frac{-20}{19} = \frac{7}{52}$.

D'où l'équation de la droite de régression linéaire $Y = \frac{37}{208}X + \frac{7}{52}$.

4 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$.

$$V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}\,y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{9\times(-1)^2+6\times 0^2+4\times 2^2}{19} - \left(\frac{-1}{19}\right)^2 = \frac{474}{361}.$$

D'où $\rho_{X,Y} = \frac{\frac{37}{361}}{\sqrt{\frac{208}{361}}\sqrt{\frac{474}{361}}} = 0,117$.

Exercice 2

1 Posons $Z = r\,e^{i\theta}$.

$$Z^3 = -8 \iff r^3\,e^{i3\theta} = 8\,e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta \equiv \pi\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta_k = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions suivantes :

$z_0 = 2\,e^{i\theta_0} = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

$z_1 = 2\,e^{i\theta_1} = 2\,e^{i\pi} = -2$.

$z_2 = 2\,e^{i\theta_2} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

2 **a.** $U = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \dfrac{-2i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \dfrac{(-2i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{(-3 - i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $|U| = 1$ et $\arg(U) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On peut choisir comme argument de U la valeur $\dfrac{\pi}{3}$.

b. Comme $\left|\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1$ alors $|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A|$. D'où $AC = AB$.

D'autre part, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)\,[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Le triangle ABC est isocèle en A et a un angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$. C'est donc un triangle équilatéral.

3 **a.** Soit $Z' = aZ + b$ l'expression complexe de la rotation S.

$$\begin{cases} S(A) = C \\ S(C) = B \end{cases} \iff \begin{cases} Z_C = aZ_A + b & (1) \\ Z_B = aZ_C + b & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), il s'ensuit que :

$a = \dfrac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_C} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En remplaçant a par $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression $b = Z_C - aZ_A$, on trouve :

$b = 1 - i\sqrt{3} - (-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

D'où l'expression de la rotation S : $Z' = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$.

b. $Z' = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = e^{i(\frac{4\pi}{3})}\,Z$.

S est de la forme $Z' - Z_O = a(Z - Z_O)$ avec $a = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$ et $Z_O = 0$. C'est donc la rotation de centre $Z_O = 0$ et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$.

Problème

Partie A

1 La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$g'(x) = -\dfrac{2x^2+1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

<u>Signe de g'</u>

$g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

<u>Tableau de variation</u>

$\lim\limits_{x\to 0_+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

2 g est strictement décroissante sur $]0;\,+\infty[$.

De plus, $g(1) = 0$.

On en déduit que :

$g(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1[$.

$g(x) < 0$ pour tout $x \in]1;+\infty[$.

Partie B

1 La fonction $x :\mapsto 1 + x - \mathrm{e}^{1-x}$ existe sur $]-\infty;1]$;

la fonction $x :\mapsto \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x}$ existe sur $]1;+\infty[$.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2 **a.** <u>Continuité de la fonction f au point $x = 1$</u>

$\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = f(1) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = f(1)$, alors la fonction f est continue au point $x = 1$.

<u>Dérivabilité de la fonction f au point $x = 1$</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1_-} \frac{x - \mathrm{e}^{1-x}}{x-1} \\ &= 1 + \lim_{u\to 0_+} \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u} \quad \text{où l'on a posé } u = 1 - x \\ &= 2\end{aligned}$$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2020

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1_+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1_+}\frac{x-x^2+\ln x}{x(x-1)}\\ &= -1+\lim_{x\to 1_+}\frac{\ln x}{x(x-1)}\\ &= -1+\lim_{x\to 1_+}\frac{\ln x-\ln 1}{(x-1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to 1_-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1_+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point $x=1$.

b. Pour tout $x\in]1;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

3 f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et on a :
$\forall x\in]-\infty;1[,\quad f'(x)=1+\mathrm{e}^{1-x}$.
$\forall x\in]1;+\infty[,\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

Signe de f'

$f'(x)>0$ pour tout $x\in]-\infty;1[$;
$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]1;+\infty[$. Par conséquent, $f'(x)<0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$.

Tableau de variation de f

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1+x-\mathrm{e}^{1-x})=-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-x+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4 (Δ) asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(2-x)\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, alors la droite (Δ) d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ)

$f(x)-(2-x)=\frac{\ln x}{x}$.

Comme la fonction $x:\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est strictement positive pour $x>1$. , alors la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ) pour $x>1$.

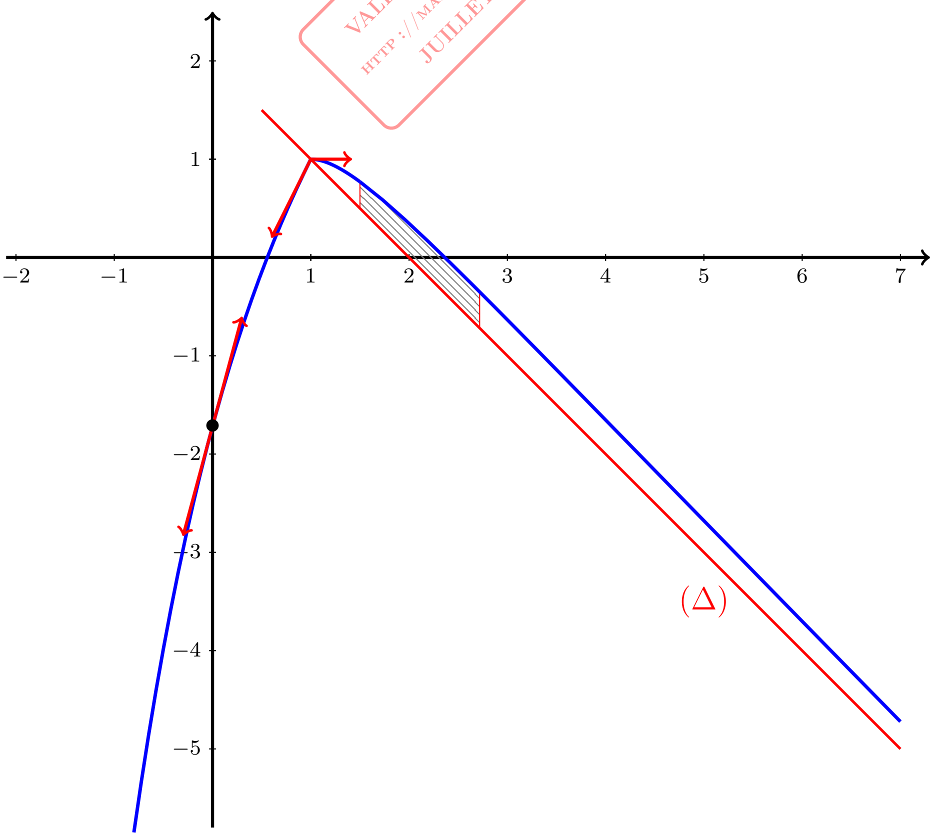
VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

5 L'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ en $x=0$ est donnée par la formule : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$. D'où $(\mathscr{T}) : y=(1+\mathrm{e})x+1-\mathrm{e}$.

6

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1-\frac{\mathrm{e}^{1-x}}{x}\right)=1-\mathrm{e}\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=1+\mathrm{e}\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{u}}{u}=+\infty$ où l'on a posé $u=-x$.
  La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.
- La droite (Δ) d'équation $y=2-x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

7



8 $\displaystyle\mathscr{A}(D)=\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\left[f(x)-(2-x)\right]dx=\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v(x)=\ln x\end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties : $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx=\Big[(\ln x)^2\Big]_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}-\int_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx.$

D'où $\displaystyle\mathscr{A}(D)=\frac{1}{2}\Big[(\ln x)^2\Big]_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{e}}=\frac{1-\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2}{2}$ u.a $=2\Big[1-\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2\Big]$ cm^2