Correction bac 2010 - Série C

Exercice 1

1 **a.**

$$\begin{aligned} x^2 \equiv -1\,[25] &\iff x^2+1 \equiv 0\,[25] \\ &\iff x^2+1 \text{ est un multiple de } 25 \\ &\iff x^2+1 = 25k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x^2 = -1+25k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc les équations $x^2 \equiv -1\,[25]$ et $x^2 = -1+25k$ où $k \in \mathbb{Z}$, sont équivalentes.

b. Si $k=2$ alors $x^2 = -1+25\times 2 = 49$. D'où $x=7$ ou $x=-7$.

2 **a.**
- si $n=0$ alors $2^0-4 \equiv -3\,[5] \equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de 2^0-4 par 5 est 2.
- si $n=1$ alors $2^1-4 \equiv -2\,[5] \equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de 2^1-4 par 5 est 3.
- si $n=2$ alors $2^2-4 \equiv 0\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de 2^2-4 par 5 est 0.
- si $n=3$ alors $2^3-4 \equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de 2^3-4 par 5 est 4.
- si $n=4$ alors $2^4-4 \equiv 12\,[5] \equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de 2^4-4 par 5 est 2.

<u>Déduisons les restes suivant les valeurs de n</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$.

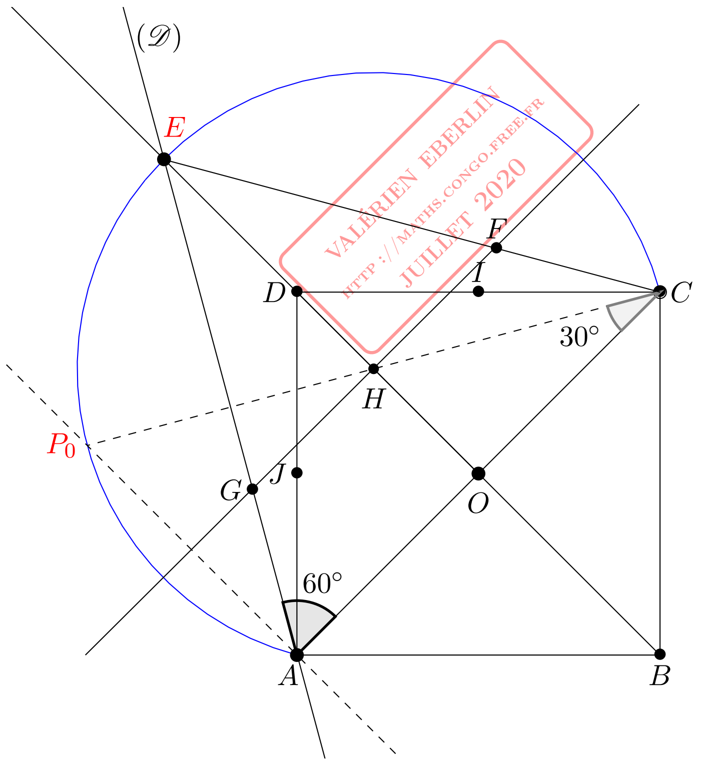
Alors n peut s'écrire $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$ ou $n=4k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $2^4 \equiv 1\,[5]$, alors $(2^4)^k \equiv 1\,[5]$. On en déduit que :

- si $n=4k$ alors $2^{4k}-4 \equiv (2^4)^k - 4\,[5] \equiv -3\,[5] \equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k}-4$ par 5 est 2.
- si $n=4k+1$ alors $2^{4k+1}-4 \equiv (2^4)^k.2 - 4\,[5] \equiv -2\,[5] \equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+1}-4$ par 5 est 3.
- si $n=4k+2$ alors $2^{4k+2}-4 \equiv (2^4)^k.2^2 - 4\,[5] \equiv 0\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+2}-4$ par 5 est 0.
- si $n=4k+3$ alors $2^{4k+3}-4 \equiv (2^4)^k.2^3 - 4\,[5] \equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+3}-4$ par 5 est 4.

b. $2010 = 4\times 502+2$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $2^{2010}-4$ par 5 est 0. Par conséquent $2^{2010}-4$ est divisible par 5.

Exercice 2



1 Soit P_0 un point tel que $\overline{(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Alors $P_0 \in (\Gamma)$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\iff \overline{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C})}\ [2\pi] \\ &\iff M \text{ est un point de l'arc de cercle } \widehat{AP_0C} \end{aligned}$$

D'où Γ est l'arc de cercle $\widehat{AP_0C}$.

2 **a.** $\overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ car E est un point de (Γ).

De plus, $\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ car $\overline{((AC), (\mathscr{D}))} \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ et $E \in (\mathscr{D})$.

On en déduit que le triangle EAC admet deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$. C'est par conséquent un triangle équilatéral.

b. Comme $EA = EC$ et $\overrightarrow{EA} \neq \overrightarrow{EC}$, alors il existe une rotation r d'angle $\overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, de centre E, qui transforme A en C.

3 **a.** Dans le triangle EAC,

- $(GF)//\ (AC)$ et $(AG) \cap (CF) = \{E\}$
- D'après le théorème de Thalès, $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC}$.

Dans le triangle EOA,

- $(GH)//\ (AO)$ et $(AG) \cap (OH) = \{E\}$
- D'après le théorème de Thalès, $\frac{EG}{EA} = \frac{EH}{EO}$.

On en déduit que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{EH}{EO}$.

Or $\dfrac{EH}{EO} = \dfrac{2}{3}$ car H est le centre de gravité du triangle EAC.

D'où $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{2}{3}$.

b. Les points E, G, A ainsi que E, F, C étant alignés dans le même ordre, on en déduit les égalités vectoriels : $\overrightarrow{EG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EC}$.

Ce qui montre que G et F sont respectivement les transformées de A et C par l'homothétie de centre E et de rapport $\dfrac{2}{3}$.

c. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $\dfrac{2}{3}$ qui transforme A en G et C en F.

Posons $S = h \circ r$.

S est une similitude plane directe de centre E, de rapport $\dfrac{2}{3}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui transforme A en F.

En effet, $S(E) = h \circ r(E) = h(E) = E$ et $S(A) = h \circ r(A) = h(C) = F$.

Problème

Partie A

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$ est : $r^2 + \pi^2 = 0$.
Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = i\pi = 0 + i\pi$ et $r_2 = -i\pi = 0 - i\pi$.
Donc la solution générale est : $y(x) = \mathrm{e}^{0x}(c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)) = c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2 g est de la forme $g(x) = c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\pi = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2\sin(\pi x)$.

Partie B

3 **a.** La fonction $x \longmapsto 2\sin\pi x$ existe pour tout $x \in [-4; 0]$;

la fonction $x \longmapsto x^2\left(\dfrac{1}{2} - \ln x\right)$ existe pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Donc $E_f = [-4; +\infty[$.

b. <u>Continuité en 0</u>.

$\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = f(0) = 2\sin(\pi \times 0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} (\frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x) = 0.$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

<u>Dérivabilité en 0</u>.

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0_-} \frac{2\sin\pi x}{x} = 2\pi \lim_{u\to 0_-} \frac{\sin u}{u} = 2\pi \text{ où l'on a posé } u = \pi\, x.$$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{2}x - x\ln x\right) = 0.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, alors la fonction f n'est pas dérivable en 0.

c. $\forall\, x \in [-4;-2]$, on a $2\sin\pi(x+2) = 2\sin(\pi x + 2\pi) = 2\sin\pi x$.

La fonction $x \longmapsto 2\sin\pi x$, définie sur $[-4;0]$, est périodique de période 2.

On peut alors restreindre son étude sur $[-2;0]$, puis reporter son tracé sur la portion $[-4;-2]$ par la translation de vecteur $-2\,\vec{i}$.

D'où l'étude de la fonction f peut être réduite à l'intervalle $I = [-2;+\infty[$.

4 **a.** La fonction f est dérivable sur $]-2;0[\,\cup\,]0;+\infty[$.

$\forall\, x \in]-2;0[$, $f'(x) = 2\pi\cos\pi x$.

$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -2x\ln x$.

<u>Signes de f'</u>

Sur $]-2;0[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos\pi x$.

$$\begin{aligned}
\cos\pi x \geq 0 &\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ;\ k\in\mathbb{Z}\\
&\iff -\frac{1}{2} + 2k \leq x \leq \frac{1}{2} + 2k \quad ;\ k\in\mathbb{Z}\\
&\iff x \in]-2;-\tfrac{3}{2}] \text{ ou } x\in [-\tfrac{1}{2};0[\quad (\text{en prenant } k=0 \text{ et } k=-1)
\end{aligned}$$

D'où, sur l'intervalle $]-2;0[$, $f'(x)\geq 0 \iff x\in]-2;-\frac{3}{2}]$ ou $x \in [-\frac{1}{2};0[$.

Sur $]0;+\infty[$,

$f'(x) = -2x\ln x \geq 0 \iff x \in]0;1]$;

$f'(x) = -2x\ln x \leq 0 \iff x \in [1;+\infty[$.

<u>Tableau de variation de f.</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

x	-2		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

b. Branches infinies

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\ln x\left(\frac{1}{2\ln x} - 1\right) = -\infty.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Points d'intersection avec l'axe (Ox)

Si $-2 \leq x \leq 0$

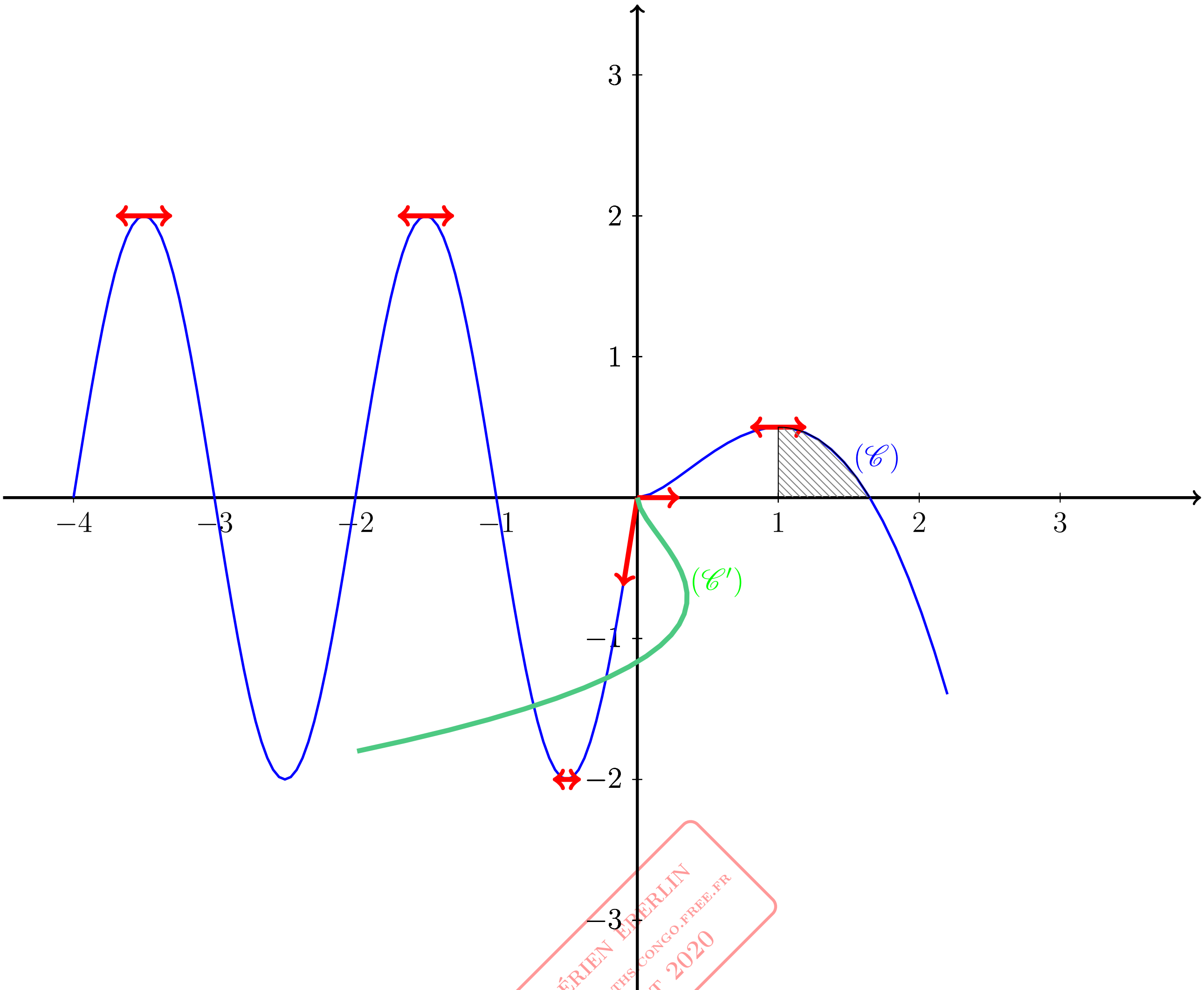
$f(x) = 0 \iff \sin \pi x = 0 \iff x = -2$ ou $x = -1$ ou $x = 0$

Si $x > 0$

$$f(x) = 0 \iff x^2\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{\mathrm{e}}$$

Sur $[-2; +\infty[$, les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses sont : $(-2, 0)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ et $(\sqrt{\mathrm{e}}, 0)$.

.



5 $A_0 = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} f(x)dx = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x\right) dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} - \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x^2 \ln x \, dx.$

Intégrons par parties $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x \, dx$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties : $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \, dx.$

D'où $A_0 = \left[\dfrac{5x^3}{18} - \dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} = \dfrac{2\,e\sqrt{e} - 5}{18}$ u.a $= \dfrac{4\,e\sqrt{e} - 10}{9}$ cm^2.

6 Voir figure.

7 **a.** Comme toute similitude de rapport k multiplie l'aire de la transformée par k^2, la similitude S multiplie l'aire de la transformée par $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

D'où : $A_n = \frac{1}{2}A_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_{n-2} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0$.

b. $(A_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$S_n = A_0 + \frac{1}{2}A_0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0 = \dfrac{A_0 \times (1 - (\frac{1}{2})^{n+1})}{1 - \frac{1}{2}} = 2A_0(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2A_0 = \dfrac{8\,e\sqrt{e} - 20}{9}$ cm^2