Sujet bac 2009 - Série C

Exercice 1 5 points

On considère la famille (S) des suites (V_n) de premiers termes V_0 et V_1 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$$

1 **a.** Déterminer les suites géométriques (a_n) et (b_n) de (S) de premier terme 1.

b. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$ où α et β sont des réels, est dans (S).

2 **a.** Déterminer les entiers relatifs α et β solutions de l'équation : $8\alpha - 27\beta = -11$.

b. Déterminer l'entier relatif k pour que le couple $(\alpha; \beta)$ défini par $\alpha = 110 + 27k$ et $\beta = 33 + 8k$ soit solution de l'équation : $4\alpha + 9\beta = 17$.

c. En déduire les valeurs des entiers relatifs α et β pour lesquelles $U_2 = 17$ et $U_3 = -11$.

d. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n \equiv 3.2^n\,[5]$.

e. Déduire le reste de la division euclidienne du terme U_n par 5.

3 Soit $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ et $S_n = W_0 + \cdots + W_n$.

a. Démontrer que $S_n \equiv 2 - 4(2)^n\,[5]$

b. Déduire le reste de la division euclidienne de la somme de S_{1956} par 5.

Exercice 2 4 points

Le plan rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0 \qquad (E)$$

2 Écrire les solutions z' et z'' de (E) sous leur forme trigonométrique.

Problème 11 points

Dans le plan $(\mathscr{P})$ orienté, on considère les points A, O, B, dans le sens tels que $AB = 6$ et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$.

Partie A

I **1.** Construire les points I et J tels que : $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{0}$.

2. Construire le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de diamètre $[IJ]$.

II **1.** Construire la droite $(\mathscr{T})$ passant par A telle que $((\mathscr{T}), (AB)) = 60°$.

2. Construire le cercle $(\mathscr{C}_2)$ passant par A et B dont la tangente en A est $(\mathscr{T})$.
3. Démontrer que les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont deux points communs Ω_1 et Ω_2 situés de part et d'autre de la droite (AB). On notera Ω_1 celui situé dans le plan de frontière (AB) contenant le centre E du cercle $(\mathscr{C}_2)$.

III

1. Démontrer que le centre de la similitude S d'angle de mesure 60°, de rapport $\frac{1}{2}$ et qui transforme A en B est le point Ω_1.
2. Démontrer que les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

I

1. Soit F le symétrique de E par rapport à la droite (AB).
   - **a.** Démontrer que J est le centre de gravité du triangle EFB.
   - **b.** Démontrer que $EJ = BK$ et $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = 60°$, K désignant le centre du cercle $(\mathscr{C}_1)$.
   - **c.** En déduire qu'il existe une rotation R qui transforme E en B et J en K.
2. Démontrer que les médiatrices des segments $[EB]$ et $[JK]$ se rencontrent en Ω_1. En déduire le centre de R.

II Soit $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R$, où R est la rotation de I.c) et $T_{\overrightarrow{BA}}$ la translation du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

1. Démontrer que les points Ω_1, J et F sont alignés.
2. Démontrer que le centre de rotation de g est F.

Partie C

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole de centre J, dont un des foyers est I et passant par A.

1 Construire le point M de $(\mathscr{H})$ situé sur le segment $[I\Omega_1]$ ainsi que ses deux sommets.

2 Démontrer que les droites (JE) et $(F\Omega_1)$ sont les asymptotes de $(\mathscr{H})$. Tracer la branche de $(\mathscr{H})$ située dans le plan de frontière la droite $(B\Omega_1)$ contenant K.

3 On désigne par $(\mathscr{H}')$ l'image de $(\mathscr{H})$ par S.

- **a.** Démontrer que l'excentricité e de $(\mathscr{H}')$ est 2.
- **b.** Déterminer les sommets et les asymptotes de $(\mathscr{H}')$.