MINEDUC - OBC

SESSION 2003

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat D

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

CORRIGÉ

Proposé par : **Équipe Educamer.org**

Exercice 1 : 4,25 points

Dans cet exercice, z désigne un nombre complexe quelconque et (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $R\left(O , \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$

1. a) Développer, réduire et ordonner par rapport aux puissances décroissantes de z l'expression : $(z + 2)(z^2 - 6z + 34)$ 0,5 pt

On a : $(z + 2)(z^2 - 6z + 34) = z^3 - 6z^2 + 34z + 2z^2 - 12z + 68$
$= z^3 - 4z^2 + 22z + 68$

b) Soit (E) l'équation $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$
Démontrer que (E) admet un entier comme solution 1 pt

De ce qui précède, on a :
$z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)(z^2 - 6z + 34) = 0$
$\Leftrightarrow z = -2$ ou $z^2 - 6z + 34 = 0$
Donc (E) admet l'entier -2 comme solution

c) Résoudre (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. 1,5 pt

(E) : $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0 \Leftrightarrow z = -2$ ou $z^2 - 6z + 34 = 0$

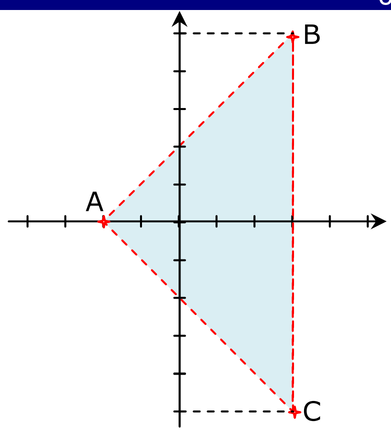
Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 34 = 0$
Discriminant : $\Delta = 36 - 136$
$= -100 = (10i)^2$

Les solutions sont alors : $z = \dfrac{6-10i}{2}$ ou $z = \dfrac{6+10i}{2}$ c'est-à-dire $z = 3 - 5i$ ou $z = 3 + 5i$

Conclusion : l'ensemble solution de 'équation (E) est : $S = \{-2 ; 3 - 5i ; 3 + 5i\}$

2. A, B et C désignent trois points de (P) d'affixes respectives -2 ; 3+5i ; 3-5i .
La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en K

a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse 0,75 pt



On a : A(-2) ; B(3 + 5i) ; C(3 - 5i).
Une esquisse permet de conjecturer que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
On a en effet :

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_c - Z_A} = \frac{5 + 5i}{5 - 5i} = \frac{1 + i}{1 - i} = i$$

Donc $\left|\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_c - Z_A}\right| = \dfrac{AB}{AC} = 1$ et $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_c - Z_A}\right) = \operatorname{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

b) R désigne la rotation du plan telle que R(K) = K et R(B) = A

Préciser la mesure principale de l'angle de R 1 pt

K est le point de (Ox) et de la droite (BC) qui a pour équation $x = 3$. Alors $K(3\ ;\ 0)$
Autrement dit, K d'affixe $Z_K = 3$.

La rotation R est telle que $\begin{cases} R(K) = K \\ R(B) = A \end{cases}$. Alors une mesure α de l'angle de est tel que :

$$\alpha = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KA}}\right) = \mathrm{Arg}\ \frac{Z_A - Z_K}{Z_B - Z_K} \quad \text{or} \quad \frac{Z_A - Z_K}{Z_B - Z_K} = \frac{-5}{5i} = i$$

Donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

R est la rotation de centre K d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : 4,75 points

Un restaurant propose à ses clients le tableau suivant appelé menu du jour.

Catégorie	**Description**
Entrée	5 entrées au choix du client, 2 à 600 F chacune et 3 à 1200 F chacune
Plat du jour	4 "plats du jours" au choix du client ; un à 1500 F , 2 à 2000 F Chacun et un 2500 F
Dessert	3 dessert au choix du client ; 2 à 500 F et un à 1000 F.

Mme IKS se rend dans ce restaurant et commande un menu en choisissant au hasard une entrée, un "plat du jour" et un dessert.
Calculer la probabilité de chacun des évènements A, B et C suivants :

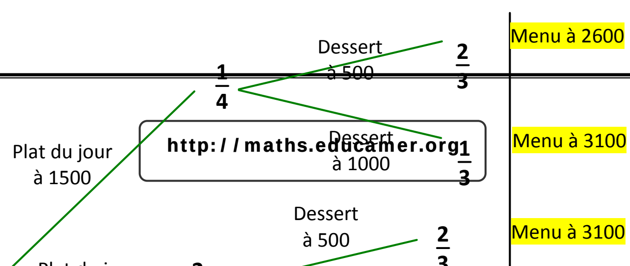
a) A " le menu de Mme IKS " coûte 3100 F ; 1,25 pt
b) B " le menu de Mme IKS " coûte au plus 4000 F ; 1,75 pt
c) C " le menu de Mme IKS " coûte au moins 3500 F 1,75 pt

On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous :
Une fois l'arbre pondéré réalisé, il est aisé de déterminer les probabilités des différents évènements.

↳ $p(A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

↳ $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \ldots$

↳ $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = \ldots$



Règles de construction d'un arbre pondéré

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Menu à 3200

Menu à 3700

Menu à 3700

Menu à 4200

Menu à 4200

Menu à 4700

Problème : 11 points

Dans tout ce problème on note :

- f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $f(x) = (x - 2)e^x + x$;
- (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité de longueur sur les axes 1 cm).
- g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par : $g(x) = (x - 1)e^x + 1$

le problème comporte trois parties liées A, B et C

Partie A

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5 pt

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [(x-1)e^x + 1] = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x-1)e^x + 1] = +\infty$

2. calculer la dérivée de g et dresser le tableau de variation de g. 0,75 pt

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

Il vient donc que : g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	1	↘	0	↗	$+\infty$

3. En déduire le signe de g(x) sur IR. 0,25 pt

On déduit de ce qui précède que : pour tout réel x, $g(x) \geq 0$

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ 0,25 pt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)e^x + x = -\infty$$

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$
Étudier la position de (C) par rapport à (D) 1 pt

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-2)e^x = 0$

  Donc la droite (D) : $y = x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

- Position de (D) par rapport à (C)

  Soit $d(x) = f(x) - x = (x - 2)e^x$
  d(x) a même signe que $(x - 2)$. Il vient donc que :
  ↳ Pour $x > 2$: $d(x) > 0$ donc (C) est au-dessus de (D)
  ↳ Pour $x < 2$: $d(x) < 0$ donc (C) est en-dessous de (D)
  ↳ Pour $x = 2$: (C) et (D) se coupent au point de coordonnée (2, 2)

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$ 0,25 pt

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-2)e^x + x = +\infty$$

b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$;
Interpréter graphiquement ce résultat. 0,75 pt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{x-2}{x}\right)e^x + 1\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)e^x + 1\right] +\infty$$

Il s'en suit donc que (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

3. Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f 0,75 pt

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x + (x-2)e^x + 1 = (x-1)e^x + 1 = g(x)$

Et puisque $g(x) = f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↗	$+\infty$

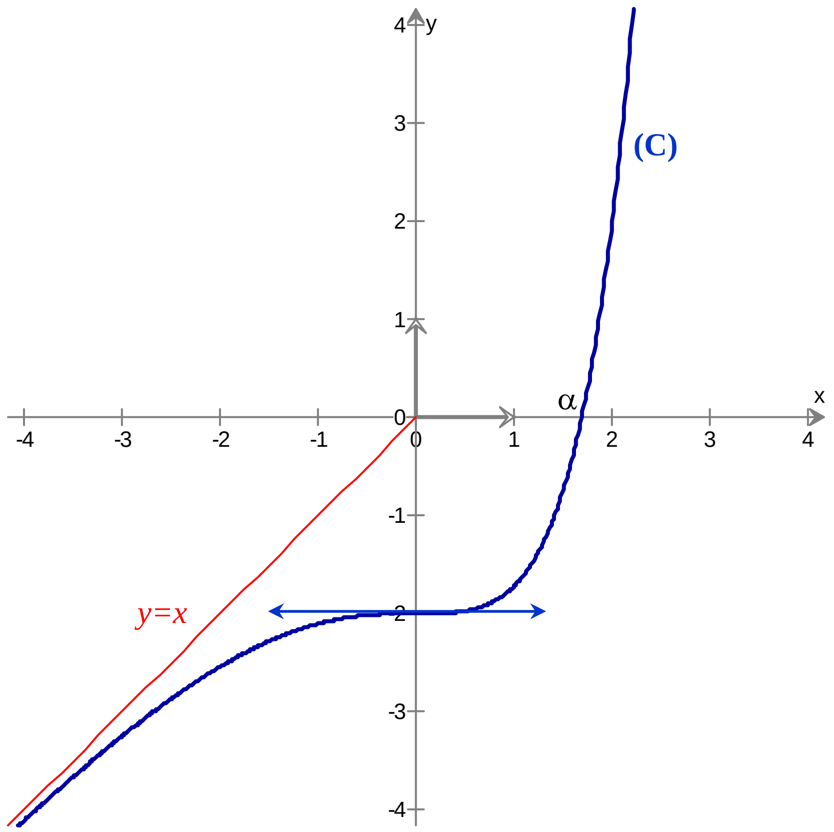
4. a) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α — 0,5 pt

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Donc il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$
Donc (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α

**b) Calculer les valeurs exactes, puis les troncatures à trois décimales de f(1,68) et f(1,7)
En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut** — 1 pt

- $f(1{,}68) = -0{,}32\, e^{1{,}68} + 1{,}68$ et $f(1{,}7) = -0{,}32\, e^{1{,}7} + 1{,}7$
- Troncature à trois décimales
  $f(1{,}68) = -0{,}036$; $f(1{,}7) = 0{,}057$
- Valeur approchée de α à 10^{-2} prés par défaut.
  On a : $f(1{,}68) \cdot f(1{,}7) < 0$ d'où $\alpha \in]1{,}68,\ 1{,}7[$.
  Donc : 1,68 est la valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut

5. tracer (C). — 1 pt



Partie C

t désigne un nombre réel négatif.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_t^0 (x-2)e^x dx$ 0,5 pt

Posons $u(x) = x-2$ et $v'(x) = e^x$. On a : $u'(x) = 1$; $v(x) = e^x$

Alors $\int_t^0 (x-2)e^x dx = \left[(x-2)e^x\right]_t^0 - \int_t^0 e^x dx$

$= \left[(x-2)e^x\right]_t^0 - \left[e^x\right]_t^0 = -3 -(t-3)e^t$

2. Calculer en centimètres carrés l'aire A(t) de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = t$; $x = 0$; $y = x$ et la courbe (C) 0,5 pt

L'unité de longueur étant le cm, une unité d'aire est égale à 1cm².

On a donc en cm² : $A(t) = \int_t^0 (x - f(x))\,dx = \int_t^0 -(x-2)e^x\,dx = 3+(t-3)e^t$

3. Calculer la limite en $-\infty$ de A(t) 0,5 pt

$\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = 3 \text{ cm}^2$

4. On considère les équations différentielles suivantes :
(E) : $y'' - 2y' + y = x - 2$; (E') : $y'' - 2y' + y = 0$

a) Trouver une fonction affine h qui soit solution de (E) 0,5 pt

Posons $h(x) = ax + b$. On a : $h'(x) = a$ et $h''(x) = 0$

h solution de (E) $\Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x-2$

$\Leftrightarrow -2a + ax + b = x - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Don la fonction affine h définie par $h(x) = x$ est une solution de (E)

b) Soit g au moins deux fois dérivable.
Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si g - h est solution de (E') 0,5 pt

Soit $x \in$ IR.

(g – h) est solution de (E') $\Leftrightarrow (g-h)''(x) - 2(g-h)'(x) + (g-h)(x) = 0$

$\Leftrightarrow [g''(x) - 2g'(x) + g(x)] - [h''(x) - 2h'(x) + h(x)] = 0$

$\Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = h''(x) - 2h'(x) + h(x)$

$\Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 2$

$\Leftrightarrow$ g est solution de (E)

c) Résoudre (E') 0,5 pt

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$

Cette équation a pour unique solution $r = 1$

Les solutions de (E') sont donc les fonctions f définies par : $f(x) = (Ax + B)e^x$; $A, B \in \mathbb{R}$

d) En déduire les solutions de (E) et vérifier que la fonction f de la <u>partie A</u> est une solution de (E) 1 pt

On déduit des questions 4.b) et 4.c) que les solutions de (E) sont les fonctions g telles que pour tout réel x : $(g-h)(x) = (Ax + B)e^x$; $A, B \in \mathbb{R}$

d'où $g(x) = (Ax + B)e^x + x$; $A, B \in \mathbb{R}$

Vérification

La fonction f définie dans la partie A est telle que : $f(x) = (Ax + B)e^x + x$ avec $A = 1$ et $B = -2$.

Donc f est une solution de (E)