Epreuve de Mathématiques

SESSION 2005

EXAMEN : Baccalauréat C/E
Durée : 4 heures
Coefficient : 5 (C) / 4 (E)

CORRIGÉ

Auteurs : Mlle NDONGO ALEXIE CATHERINE N. (Collège Alfred Saker / Douala)
Mlle YUEGO EUNICE VANESSA (Collège Alfred Saker / Douala)

Coordination : M. NDEDI Thomas B.

Mise en forme : M. TANKOUA S.

Exercice 1 : 5 points *(Uniquement pour les candidats de C)*

1. a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $13x - 84y = 7$ 1,5 pt

- Cherchons une solution particulière (x_o, y_o) de (E).

Par l'algorithme d'Euclide, on a : $84 = 13 \times 6 + 6$
$13 = 6 \times 2 + 1$

alors, $1 = 13 - 6 \times 2$
$= 13 - 2(84 - 13 \times 6)$
$= 13 - 2 \times 84 + 12 \times 13$
$1 = 13 \times 13 - 2 \times 84$

en multipliant cette dernière égalité par 7, on obtient : $7 = (13 \times 7) \times 13 - (2 \times 7) \times 84$

soit $7 = 13 \times 91 - 84 \times 14$

> Remarque : on peut remarquer tout de suite, sans passer par l'algorithme d'Euclide, que le couple (8 , 1) est une solution particulière de (E)

D'ou $(x_o, y_o) = (91,14)$.

- Résolution de (E)

On a : $\begin{cases} 13x - 84y = 7 \\ 13 \times 91 - 84 \times 14 = 7 \end{cases}$

alors, $13(x - 91) - 84(y - 14) = 0$ (on a fait une soustraction membre à membre)

$13(x - 91) = 84(y - 14)$

Donc 84 divise $13(x - 91)$

Or 13 et 84 sont premiers entre eux donc 84 divise $(x - 91)$

Il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 91 = 84k$

Soit $x = 84k + 91$

Et par suite, $y - 14 = \dfrac{13(x-91)}{84} = \dfrac{13(84k)}{84} = 13k$

alors, $y = 13k + 14$; $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $S = \left\{(x\,,\,y) = (84k + 91\,,\,13k + 14),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Montrer que pour tout couple solution (a ; b) de (E), on a :
pgcd (a ; b) = 1 ou pgcd (a ; b) = 7 — 2 pts

<u>1ère méthode</u>

Soit (a ; b) un couple de solution de (E)

D'après 1.a), on a (a, b) = (84k + 91, 13k + 14) ; $k \in \mathbb{Z}$

$84k + 91 = 6 \times (13k + 14) + 6k + 7$

$13k + 14 = 2 \times (6k + 7) + k$

$6k + 7 = 6 \times k + 7.$

il vien que pgcd (a,b) = pgcd (84k + 91, 13k + 14)
= pgcd (13k + 14, 6k + 7)
= pgcd (6k + 7, k)
= pgcd (k, 7).

Or 7 est un nombre premier.

Alors, Pgcd (k , 7) = 7 si $k \in {}_7\mathbb{Z}$ ou pgcd (k,7) = 1 si $k \notin {}_7\mathbb{Z}$

Conclusion : pour tout couple solution (a ; b) de (E), on a :
pgcd (a ; b) = 1 ou pgcd (a ; b) = 7

<u>2éme méthode :</u>

Soient a, b deux entiers relatifs

(a,b) solution de (E) $\Leftrightarrow$ $13a - 84b = 7$.

Donc 7 est une combinaison linéaire de a et b par conséquent, 7 est un multiple du pgcd (a,b)

(En effet, l'ensemble des combinaisons linéaires de a et b est l'ensemble des multiples de leur pgcd)

Or 7 est premier.

Donc pgcd (a,b) = 1 ou pgcd (a,b) = 7.

2. Déterminer les solutions (a ; b) de (E) telles que a et b soient premiers entre eux — 0,75 pt

On utilise la 1er méthode pour conclure que :

Les solutions (a,b) de E telles que a et b soient premiers entre eux (pgcd (a,b) = 1)
sont les couples (84k +91, 13k + 14) où $k \notin {}_7\mathbb{Z}$

3. Déterminer les solutions (a ; b) de (E) telles que : pgcd (a ; b) = 7 0,75 pt

De même qu'à la question précédente :

Les solutions (a,b) de E telles que pgcd (a,b) = 7

sont les couples (84k +91, 13k + 14) où $k \in {}_7\mathbb{Z}$

Exercice 1 : 5 points *(Uniquement pour les candidats de E)*

Soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur IR par $f_{a,b}(x) = a\sin x + b\sin^3 x$, où a et b désignent deux réels

1. Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$. $f'_{a,b}$ et $f''_{a,b}$ désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de $f_{a,b}$ 1,5 pt

- $f'_{a,b}(x) = (a\sin x)' + (b\sin^3 x)' = a\cos x + 3b\cos x\sin^2 x = \cos x\,(a + 3b\sin^2 x)$
- $f''_{a,b}(x) = (f'_{a,b})'(x) = (\cos x)'(a + 3b\sin^2 x) + \cos x\,(a + 3b\sin^2 x)'$

$$= -\sin x\,(a + 3b\sin^2 x) + \cos x(6b\cos x\sin x)$$
$$= -a\sin x - 3b\sin^3 x + 6b\cos^2 x\sin^2 x$$
$$= -a\sin x - 3b\sin^3 x + 6b(1 - \sin^2 x)\sin^2 x$$
$$= -a\sin x - 3b\sin^3 x + 6b\sin x - 6b\sin^3 x$$
$$= (6b - a)\sin x - 9b\sin^3 x$$

Remarque : La question ne précise pas jusqu'où on doit réduire les calculs

On peut donc gagner en temps (et souffrir plus tard ?) en s'arrêtant à la 1ère étape du calcul

Conclusion : pour tout reel x, $f'_{a,b}(x) = \cos x\,(a + 3b\sin^2 x)$ et $f''_{a,b}(x) = (6b - a)\sin x - 9b\sin^3 x$

2. Déduire les primitives de $f_{a,b}$ sur IR 1 pt

Soit $F_{a,b}$ une primitive de $f_{a,b}$ sur IR

$f_{a,b}(x) = a\sin x + b\sin^3 x$

d'après la question précédente, on a : $b\sin^3 x = -\frac{1}{9}[f''_{a,b}(x) - 6b\sin x + a\sin x]$

alors, $f_{a,b}(x) = a\sin x - \frac{1}{9}[f''_{a,b}(x) - 6b\sin x + a\sin x]$

Il vient alors que : $F_{a,b}(x) = -a\cos x - \frac{1}{9}[f'_{a,b}(x) + 6b\cos x - a\cos x]$

$F_{a,b}(x) = -a\cos x - \frac{1}{9}\left[\cos x\,(a + 3b\sin^2 x) + 6b\cos x - a\cos x\right]$ (on peut bien s'arrêter ici)

$$= -\cos x\left[a + \frac{1}{9}(3b\sin^2 x + 6b)\right] = -\cos x\left(a + \frac{1}{3}b\sin^2 x + \frac{2}{3}b\right)$$

Conclusion : les primitives de $f_{a,b}$ sur IR sont les fonctions $F_{a,b}$ définies sur IR par

$$F_{a,b}(x) = -\cos x\left(a + \frac{1}{3}b\sin^2 x + \frac{2}{3}b\right) + k \; ; \; k \in IR$$

Remarque : Le calcul de des primitives de $f_{a,b}$ sur IR peut se faire sans tenir compte des questions précédentes (auquel cas il ne s'agit plus d'une déduction).

Pour cela, on a :

- $\sin^3x = \sin^2x \,.\, \sin x = (1 - \cos^2x)\sin x = \sin x - \sin x\cos^2x$
- $f_{a,b}(x) = a\sin x + b\sin^3x = a\sin x + b\sin x - b \sin x\cos^2x = (a + b) \sin x - b \sin x\cos^2x$
- Une primitive de $f_{a,b}$ sur IR est alors la fonction $x \mapsto -(a + b) \cos x + b\left(\frac{1}{3}\cos^3x\right) = -\cos x\left(a + \frac{1}{3} b \sin^2x + \frac{2}{3} b\right)$

3. a) Déterminer la primitive de $f_{a,b}$ dont la courbe représentative passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et a une tangente au point A parallèle à la première bissectrice. 1,5 pt

- la première bissectrice est la droite d'équation y = x : coefficient directeur = 1
- Soit $G_{a,b}$ la primitive à déterminer.

  la tangente à la courbe représentative de $G_{a,b}$ en A a pour coefficient directeur $G_{a,b}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

  et $G_{a,b}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_{a,b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b$

  D'autre part $G_{a,b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = k$ $\qquad \left[G_{a,b}(x) = -\cos x\left(a + \frac{1}{3} b \sin^2x + \frac{2}{3} b\right) + k \ , \ k \in IR\right]$

- $G_{a,b}$ est telle que $\begin{cases} G_{a,b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ G_{a,b}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} k = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

Alors, $G_{a,b}(x) = -\cos x\left(a + \frac{1}{3} b \sin^2x + \frac{2}{3} b\right) = -(a + b) \cos x + b\left(\frac{1}{3}\cos^3x\right) = -\cos x + b\left(\frac{1}{3}\cos^3x\right)$

Conclusion : $G_{a,b}(x) = \frac{b}{3}\cos^3x - \cos x$

b) Soit f la fonction définie en x par : $f(x) = -\sin x + 2\sin^3x$,
et F une primitive de f.
Ecrire une équation de la tangente à la courbe de F au point A parallèle à la première bissectrice 1 pt

- $f = f_{-1,2}$

  Alors une primitive de f est $F = F_{-1,2} : x \mapsto -(a + b) \cos x + b\left(\frac{1}{3}\cos^3x\right) = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3x$

- Soit (T) la tangente à déterminer.

  (T) : $y = F'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire $y = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2 = 1$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Conclusion : (T) : $y = x - \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 : 5 points

Soit g la numérique d'une variable réelle x définie par : $g(x) = (x + 2)e^{-x}$
Soit C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique sur les axes : 2 cm.

1. a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 1,5 pt

- g est un produit de fonctions dérivables sur IR donc g est dérivable sur IR
- Soit $x \in$ IR : $g'(x) = (x + 2)'\, e^{-x} + (x + 2)\left(e^{-x}\right)'$

$$= e^{-x} - (x + 2)\left(e^{-x}\right) = -\left(e^{-x}\right)(x + 1)$$

- $g'(x)$ de même signe que $-(x + 1)$

il vient que : | g est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty , -1]$
g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1 , +\infty[$
$g(-1) = e$ maximum absolu de f sur IR

- Limites :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + 2)e^{-x} = -\infty \quad \text{en effet} \quad \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + 2)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = 0 \quad \text{en effet} \quad \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \end{array} \right.$$

- Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+		-	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

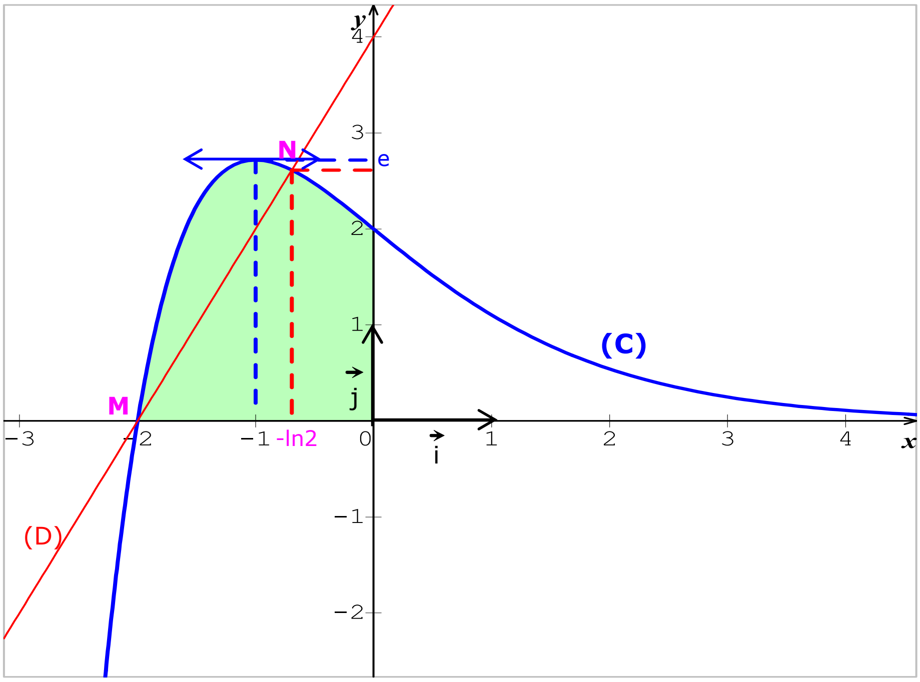
b) montrer que l'axe des abscisses est asymptote et l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe C_g 0,5 pt

- Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction g en $+\infty$

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

Il vient que la courbe représentative de la fonction g admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)

c) tracer la courbe C_g 0,75 pt



2. Soit (Δ) le domaine plan limité par les droites d'équations
$x = -2$; $x = 0$; $y = 0$, la courbe C_g et la droite d'équation $y = 2x + 4$.
Calculer les coordonnées des points d'intersection de (D) et de C_g
Calculer l'aire de (Δ). 0,5 pt

- (D) : $y = 2x + 4$ c'est-à-dire $y = 2(x + 2)$
- $g(x) = 2(x + 2) \Leftrightarrow (x + 2)e^{-x} - 2(x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow (x + 2)(e^{-x} - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2 = 0$ ou $e^{-x} = 2$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -\ln 2$

Conclusion : Les points d'intersection de (D) et de C_g sont $M\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}-\ln 2\\-2\ln 2 + 4\end{pmatrix}$

- Calcul de l'aire de (Δ)

$A = \int_{-2}^{0} g(x)\,dx$ u.a $= \int_{-2}^{0} (x + 2)e^{-x}\,dx$ u.a

Posons $\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-2}^{0} (x + 2)e^{-x}\,dx = \left[- (x + 2)e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx = \left[- (x + 2)e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \left[- e^{-x}\right]_{-2}^{0} = e^2 - 3$$

or 1 u.a = 4 cm²

alors, $A = 4(e^2 - 3)$ cm²

Remarque : le texte de la question 2°) est assez ambiguë quant à la définition du domaine (Δ). On peut aussi bien comprendre que (Δ) est le domaine plan limité par les droites d'équations x = -2 ; x = 0 ; y = 0 , la courbe C_g et la droite y = 2x + 4. (voir figure ci-dessous)

Dans ce cas :

$$A = \left(\int_{-2}^{-\ln 2} [f(x) - (2x+4)]\,dx + \int_{-\ln 2}^{0} [(2x+4) - f(x)]\,dx \right) \text{ u.a}$$

or 1 u.a = 4 cm²

$$\text{alors } A = 4\left(\int_{-2}^{-\ln 2} [f(x) - (2x+4)]\,dx + \int_{-\ln 2}^{0} [(2x+4) - f(x)]\,dx \right) \text{ (cm²)}$$

➪ Soit $I = \int_{-2}^{-\ln 2} [f(x) - (2x+4)]\,dx = \int_{-2}^{-\ln 2} (x+2)e^{-x}\,dx - \int_{-2}^{-\ln 2} (2x+4)\,dx$

Soit $K = \int_{-2}^{-\ln 2} (x+2)e^{-x}\,dx$

Posons $\left| \begin{array}{l} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right.$ alors $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$

$$K = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{-\ln 2} + \int_{-2}^{-\ln 2} e^{-x}\,dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{-\ln 2} + \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{-\ln 2} = e^2 + 2\ln 2 - 6$$

Par ailleurs $\int_{-2}^{-\ln 2} (2x+4)\,dx \ \left[x^2 + 4x\right]_{-2}^{-\ln 2} = (\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 4$

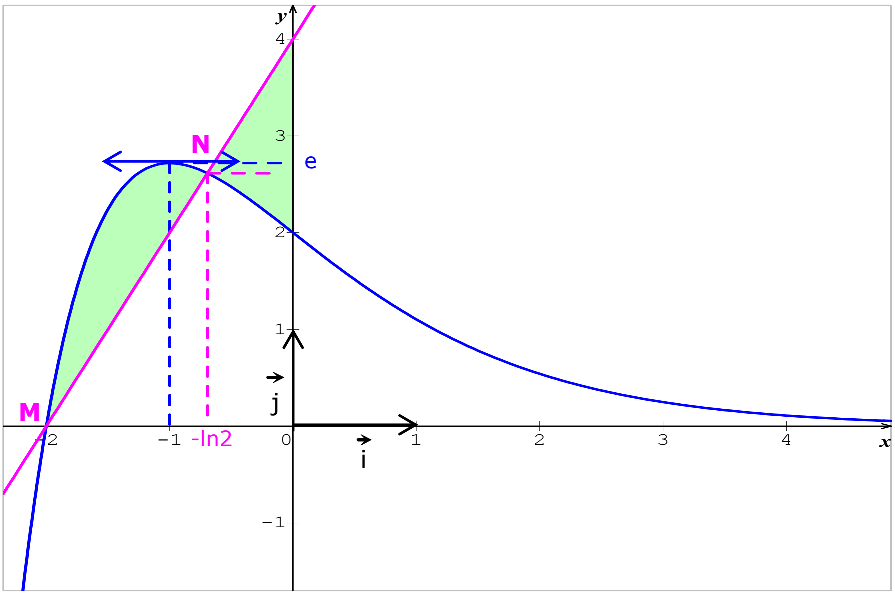
alors $I = e^2 + 2\ln 2 - 6 - (\ln 2)^2 + 4\ln 2 - 4 = e^2 + 6\ln 2 - (\ln 2)^2 - 10 \approx 1{,}06749$

➪ Soit $J = \int_{-\ln 2}^{0} [(2x+4) - f(x)]\,dx = \int_{-\ln 2}^{0} (2x+4)\,dx - \int_{-\ln 2}^{0} (x+2)e^{-x}\,dx$

$$J = \left[x^2 + 4x\right]_{-\ln 2}^{0} - \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0} - \left[-e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0} = 6\ln 2 - (\ln 2)^2 - 3 \approx 0{,}67843$$

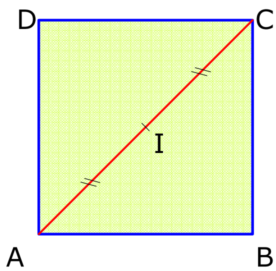
Il vient que $A = 4(I + J) = 4(e^2 + 6\ln 2 - (\ln 2)^2 + 6\ln 2 - (\ln 2)^2 - 3) = 4e^2 + 48\ln 2 - 8(\ln 2)^2 - 12$

$A = (4e^2 + 48\ln 2 - 8(\ln 2)^2 - 12)$ cm² $\approx 1{,}56$ cm²



3. Soit ABCD un carré direct du plan de centre I et de côté a , S la similitude directe de centre A qui transforme C en B.

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S. **0,75 pt**



On a $\begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = B \end{cases}$

alors, S de rapport k et d'angle α tels que

$$\begin{cases} k = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha = \text{mes}\,\widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)} = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

b) Montrer que I est l'image de D par S. **0,5 pt**

- On a : $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = AD\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = k$
- $\text{mes}\,\widehat{\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)} = -\dfrac{\pi}{4} = \alpha$

Puisque $\begin{cases} \dfrac{AI}{AD} = k \\ \text{mes}\,\widehat{\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)} = \alpha \end{cases}$ on a $s(D) = I$

c) En déduire l'aire de $S(\Delta)$, image de (Δ) par S. 0,5 pt

Aire de $S(\Delta)$ = k² x aire de (Δ)

$$\frac{1}{2} \times (4e^2 + 48\ln 2 - 8(\ln 2)^2 - 12) = 2e^2 + 24\ln 2 - 4(\ln 2)^2 - 6 \ (\text{cm}^2)$$

Problème : 10 points

Partie A

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif.
   Montrer par récurrence que : $(1 + nx) \le (1 + x)^n$. 0,75 pt

- Pour n = 1, on a : $\left| \begin{array}{l} (1 + (1)x) = 1 + x \\ (1 + x)^1 = 1 + x \end{array}\right.$ et on bien $(1 + nx) \le (1 + x)^n$
- Soit $k \in IN$, $k \ge 1$
  Supposons la proposition vraie au rang k (c'est-à-dire $(1 + kx) \le (1 + x)^k$)
- Pour n = k + 1, on a :
  $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)^k$
  Et puisque $(1 + kx) \le (1 + x)^k$, on a : $(1 + kx)(1 + x) \le (1 + x)^k(1 + x)$
  autrement dit $1 + kx + x + kx^2 \le (1 + x)^{k+1}$
  Or $1 + kx + x \le 1 + kx + x + kx^2$ (car $kx^2 \ge 0$)
  alors $1 + kx + x \le (1 + x)^{k+1}$
  autrement dit $1 + (k + 1)x \le (1 + x)^{k+1}$

  la proposition est donc héréditaire

  Conclusion : $\forall n \in IN$, $(1 + nx) \le (1 + x)^n$

2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boites numérotées de 1 à n, chaque boite pouvant contenir de zéro à n boules.
   Calculer la probabilité P_n pour que chaque boite contienne exactement une boule. 0,75 pt

- Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.
  Card Ω = n^n

  une éventualité correspond à une application de l'ensemble des boules vers l'ensemble des boites

- Soit A l'évènement « chaque boite contient exactement une boules » : Card A = $A_n^n = n!$

  alors $p(A) = P_n = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{n!}{n^n}$

3. On pose $P_n = \dfrac{n!}{n^n}$, où n! désigne « factoriel n »

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $\dfrac{P_n}{P_{n+1}} \ge 2$ 0,75 pt

   Soit $n \in IN^*$: $\dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} = \dfrac{n!}{(n+1)n!} \times \dfrac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Et d'après la question 1°) : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

Il vient alors que $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$

b) En déduire l'inégalité : $P_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1. 0,75 pt

Soit $n \in IN^*$

On a : $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$ alors $P_n \geq 2P_{n+1}$ (car $P_{n+1} > 0$)

il vient que $P_{n+1} \leq \frac{1}{2} P_n$ pour tout $n \in IN^*$

Prouvons, par récurrence que $P_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ pour tout $n \in IN^*$

- pour $n = 1$ $\left| \begin{array}{l} P_1 = 1 \\ \frac{1}{2^{1-2}} = 2 \end{array} \right.$ $P_1 \leq \frac{1}{2^{1-2}}$ la proposition est vraie pour $n = 1$
- Soit $k \in IN^*$. Supposons que la proposition soit vraie pour $n = k$ (c-à-d $P_k \leq \frac{1}{2^{k-2}}$)
- pour $n = k+1$, on a $P_{k+1} \leq \frac{1}{2} P_k$ (conséquence de la question 3.b))

$\left| \begin{array}{l} P_{k+1} \leq \frac{1}{2} P_k \\ P_k \leq \frac{1}{2^{k-2}} \end{array} \right.$ alors $P_{k+1} \times P_k \leq \left(\frac{1}{2} P_k\right)\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)$

il vient donc que $P_{k+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)$ c'est-à-dire $P_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : $P_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1

c) Calculer la limite de la suite (P_n) quand n tend vers $+\infty$ 0,25 pt

On a : $0 < P_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0$.

alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0$

Partie B

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormé $B = (\vec{i}, \vec{j})$, g l'endomorphisme de E_2 qui à un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u}' = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$

1. a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijective. 0,75 pt

On a : $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$, donc $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. De même $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$g(\vec{i}) = \left[(1) + \frac{1}{2}(0)\right]\vec{i} + [-2(1) - (0)]\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$g(\vec{j}) = \left[(0) + \frac{1}{2}(1)\right]\vec{i} + [-2(0) - (1)]\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}$$

il vient alors que la matrice de g dans la base B est $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Par ailleurs, $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

alors g n'est pas bijective

b) Déterminer le noyau Ker g et l'image Im g de g 0,5 pt

$$\text{Ker } g = \left\{\vec{u} \in E_2,\ g(\vec{u}) = \vec{0}\right\}$$

Donc, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in \text{Ker } g \iff g(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\iff \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \iff 2x + y = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = -2x$$

$$\iff \vec{u} = x\vec{i} + (-2x)\vec{j} = x(\vec{i} - 2\vec{j})\ ;\quad x \in \mathbb{R}$$

Ker g est l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur $\vec{e_1} = \vec{i} - 2\vec{j}$

autrement dit, Ker g est le sous-espace vectoriel de E_2 de base $\{\vec{e_1}\}$

$\text{Im } g = \left\{ \vec{u'} = g(\vec{u}),\ \vec{u} \in E_2 \right\}$

Soit $\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{u'} = g(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y \\ y' = -2x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x' = -2x - y \\ y' = -2x - y \end{cases} \Leftrightarrow -2x' = y' \Leftrightarrow 2x' + y' = 0$

il vient que Im g est l'ensemble des vecteurs $\vec{u'} = x'\vec{i} + (-2x')\vec{j} = x'(\vec{i} - 2\vec{j})$; $x' \in IR$

autrement dit, Im g est l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur $\vec{e_1} = \vec{i} - 2\vec{j}$

Conclusion : Im g est le sous-espace vectoriel de E_2 de base $\left\{\vec{e_1}\right\}$

c) En déduire que Ker g = Im g — 0,25 pt

D'après la question précédente :

Ker g est le sous-espace vectoriel de E_2 de base $\left\{\vec{e_1}\right\}$
Im g est le sous-espace vectoriel de E_2 de base $\left\{\vec{e_1}\right\}$

alors Ker g = Im g

2. Soit $\vec{v}$ un vecteur de Ker g.
Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$ — 0,25 pt

$\vec{v}$ un vecteur de Ker g et que Ker g = Im g, $\vec{v} \in \text{Im } g$

et puisque $\begin{cases} \vec{v} \in \text{Im } g \\ \text{Im } g = \left\{ \vec{u'} = g(\vec{u}),\ \vec{u} \in E_2 \right\} \end{cases}$ alors il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$

3. Soit $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de coordonnées respectives (-1 ; 2) et (-1 ; 1)

a) Montre que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E_2 — 0,5 pt

$\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (2)(-1) = 1$

$\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \neq 0$. Alors $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E_2

b) Donner la matrice de g dans la base B' — 0,5 pt

- $g(\vec{e_1}) = \vec{0}$ car $\vec{e_1} \in \text{Ker } g$
-

○ $g(\vec{e_2}) = \left[(-1) + \frac{1}{2}(1)\right]\vec{i} + [-2(-1) - (1)]\,\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$

or $\begin{cases} \vec{e_1} = -\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{e_2} = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$ alors $\vec{e_1} - \vec{e_2} = \vec{j}$ et $\vec{e_1} - 2\vec{e_2} = \vec{i}$

il vient que $g(\vec{e_2}) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} = -\frac{1}{2}(\vec{e_1} - 2\vec{e_2}) + (\vec{e_1} - \vec{e_2}) = \frac{1}{2}\vec{e_1}$

En définitive : $\begin{cases} g(\vec{e_1}) = \vec{0} \\ g(\vec{e_2}) = \frac{1}{2}\vec{e_1} \end{cases}$ la matrice de g dans la base B′ est alors $M' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Partie C

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit les trois points $A(1\ ;\ 0)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ et la droite (D) dont une équation est $x = 1$

1. a) Déterminer les coordonnées du points G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ — 0,25 pt

Soit G(x , y)

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Conclusion : G(2 , 0)

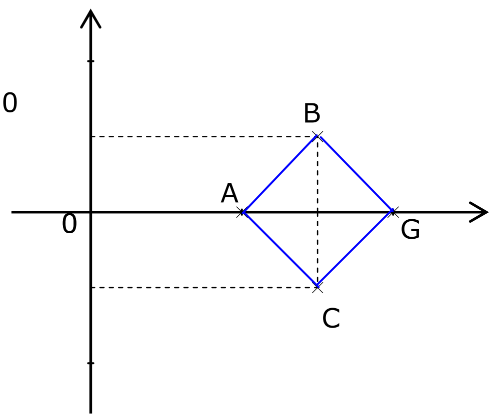
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABGC ? — 0,25 pt

- Puisque $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ le quadrilatère ABGC est un parallélogramme
- D'autre part $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Il est immédiat que : AB = AC et que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$

Il vient que ABGC est parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux et un angle droit

Conclusion : ABGC est un carré



Remarque : La figure n'est pas demandée. Mais elle est nécessaire pour nous guider dans la démarche

2. On note (Γ) l'ensemble des points M de P , de coordonnées (x ; y) , qui

vérifient la relation : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$

a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ). 0,5 pt

- On a : $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
  - $-BA^2 + BB^2 + BC^2 = -BA^2 + BC^2 = -\left(\frac{1}{2}\right) + (1)^2 = \frac{1}{2}$
  - $2(x_B - 1)^2 = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2}$

Il vient que B appartient à (Γ).

- On a : $C\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
  - $-CA^2 + CB^2 + CC^2 = -CA^2 + CB^2 = -\left(\frac{1}{2}\right) + (1)^2 = \frac{1}{2}$
  - $2(x_C - 1)^2 = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2}$

Il vient que C appartient à (Γ).

b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de P tels que :
$MG = a\sqrt{2}$; où a désigne la distance du point M à la droite (D) 1 pt

- Soit M un point du plan.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow -MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 2(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\bullet\left(-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) - GA^2 + GB^2 + GC^2 = 2(x - 1)^2$$

Or ABGC est un carré et $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

alors, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG^2 = 2(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow MG = \sqrt{2}\,|x - 1|$

- Par ailleurs, $(D) : x = 1$

  Pour tout point $M(x, y)$, on a $d(M, (D)) = |x - 1|$

  donc $a = |x - 1|$

Il vient que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG = a\sqrt{2}$

c) En déduire la nature de (Γ) et préciser son excentricité, un de ses foyers
et la directrice associée 1 pt

- (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $MG = a\sqrt{2}$ où $a = d(M, (D))$

  (Γ) est donc la conique d'excentricité $e = \sqrt{2}$, de foyer G et de directrice (D)

  Et puisque $e > 1$, (Γ) est une hyperbole

3. Représenter (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 1 pt

$M(x , y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG^2 = 2(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow (2 - x)^2 + y^2 = 2(x - 1)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

(Γ) est l'hyperbole de sommets $S\left(\sqrt{2} , 0\right)$ et $S'\left(-\sqrt{2} , 0\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$