MINESEC - OBC

Session 2008

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXAMEN : BACCALAUREAT A4

Durée : 3 H

Coefficient : 3

CORRIGÉ

Proposé par : **Équipe Educamer.org**

EXERCICE 1. / 05 points

1. On se propose de résoudre dans IR l'équation (E) suivante :
$-e^{2x} + 3e^{x} + 4 = 0$

a. Résoudre dans IR l'équation $-x^2 + 3x + 4 = 0$ **1 pt**

$x_1 = -1$ est une racine évidente (en effet : $-(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 0$)

On sait par ailleurs que : $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -4$ autrement dit : $-x_2 = -4$ et donc $x_2 = 4$

(avec $c = 4$ et $a = -1$).

Conclusion : L'équation admet deux solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$

Remarque : On peut bien sur procéder par calcul du discriminant

b. Résoudre dans IR l'équation (E). **1 pt**

Soit $x \in$ IR.

(E) $\Leftrightarrow -(e^x)^2 + 3(e^x) + 4 = 0$

On déduit de la question 1.a) que : $e^x = -1$ ou $e^x = 4$

Puisque $e^x > 0$ pour tout réel x, on a : $e^x = 4 = e^{\ln 4}$ il s'en suit alors que $x = \ln 4$

Conclusion : L'équation admet une unique solution $x_0 = \ln 4$

2. a. **Résoudre dans IR^3 le système suivant : $\begin{cases} 5x-2y+3z=6 \\ -4x+3y+z=0 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$** **1,5 pt**

Procédons par la méthode du pivot de Gauss :

➥ $\begin{cases} 5x-2y+3z=6 \\ -4x+3y+z=0 \\ x+3y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=2 & (L1) \\ -4x+3y+z=0 & (L2) \\ 5x-2y+3z=6 & (L3) \end{cases}$

➥ Conservons l'équation (L1) et éliminons x dans (L2) et (L3)

↳ (L2) devient 4(L1) + (L2) c'est-à-dire $15y - 7z = 8$

↳ (L3) devient -5(L1) + (L3) c'est-à-dire $-17y + 13z = -4$

Ainsi : $\begin{cases} 5x-2y+3z=6 \\ -4x+3y+z=0 \\ x+3y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=2 & (L1) \\ 15y-7z=8 & (L2) \\ -17y+13z=-4 & (L3) \end{cases}$

➥ Conservons l'équation (L1) et (L2) et éliminons y dans (L3)

↳ (L3) devient 15(L1) + 17(L2) c'est-à-dire $76z = 76$

Ainsi : $\begin{cases} 5x-2y+3z=6 \\ -4x+3y+z=0 \\ x+3y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 15y-7z=8 \\ 76z=76 \end{cases}$

Il vient alors que : $z = 1$; $y = 1$ et $x = 1$

Conclusion : Le système admet une unique solution $(x ; y ; z) = (1 ; 1 ; 1)$

b. En déduire dans IR^3 les solutions du système suivant : $\begin{cases} 5\ln x - 2\ln y + 3\ln z = 6 \\ -4\ln x + 3\ln y + \ln z = 0 \\ \ln x + 3\ln y - 2\ln z = 2 \end{cases}$ 1,5 pt

On déduit de la question 2.a) que : $\ln x = 1$; $\ln x = 1$; $\ln z = 1$

Donc : $x = e$; $y = e$; $z = e$

Conclusion : Le système admet une unique solution $(x ; y ; z) = (e ; e ; e)$

Nous indiquons ici une justification (non demandée) à titre pédagogique

<u>EXERCICE 2</u> : **/ 05 Points**

Pour chacune des questions, choisir la réponse juste et l'écrire sur votre feuille de composition.

Aucune justification n'est exigée.

1. Le nombre réel 0,73737373 a pour arrondi d'ordre 2 :

a) 0,737 ; b) 0,73 ; c) 0,74 ; d) 0,7. 0,75 pt

La bonne réponse est c) 0,74

- À 10^{-2} près, on a : $0,73 < 0,73737373 < 0,74$ (on commence par un encadrement : à gauche on a la valeur approchée par défaut et à droite la valeur approchée par excès)
  Remarque : la valeur approchée par défaut correspond encore à la troncature.
- Si le chiffre qui suit la 2ème décimale est strictement inférieur à 5, alors : valeur approchée par défaut = arrondi
- Si le chiffre qui suit la 2ème décimale est supérieure ou égal à 5, alors : valeur approchée par excès = arrondi

2. Une solution de l'équation $x^3 - 16x^2 + 23x + 40 = 0$ à inconnue x dans $\mathbb{R}$ est :

a) -2 ; b) -1 ; c) 1 ; d) 0. 0,75 pt

La bonne réponse est b) -1

En effet : $(-1)^3 - 16(-1)^2 + 23(-1) + 40 = -1 - 16 - 23 + 40 = -40 + 40 = 0$

3. Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + e^x$ au point d'abscisse 0 est :

a) $y = 0$; b) $y = 1$; c) $y = x + 1$; d) $y = 2x + 1$ 0,75 pt

La bonne réponse est c) $y = x + 1$

En effet :

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

- $f'(x) = -2x + e^x$ et $f'(0) = 1$
- $f(0) = 1$

Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = x + 1$

4. Dans une classe de 40 élèves, 15 élèves ont moins de 17 ans, 10 élèves ont entre 17 et 20 ans, 6 élèves ont 21 ans et le reste à plus de 21 ans.
   On choisit au hasard un élève dans cette classe.
   4.1 La probabilité pour que cet élève ait moins de 21 ans est :

a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{2}{8}$; d) $\frac{1}{5}$.

La bonne réponse est d) $\frac{1}{5}$

En effet :

- 15 + 17 = 32 :
  Donc 32 élèves ont moins de 21 ans. Donc 8 élèves ont au moins 21 ans (21 ans et plus)
- La probabilité pour qu'un élève choisit ait au moins 21 ans est donc : 8/40 = 1/5

4.2 On dit qu'un élève est mineur s'il a moins de 17 ans. La probabilité pour que l'élève choisit ne soit pas mineur est :

a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{1}{4}$

La bonne réponse est d) $\frac{5}{8}$

En effet :
➥ 15 élèves ont moins de 17 ans. Donc 25 élèves ont 17 ans et plus
➥ La probabilité pour qu'un élève choisit ne soit pas mineur est donc : 25/40 = 5/8

5. Une primitive dans l'intervalle]3 ; +∞[de la fonction g : $x \mapsto x - 3 + \frac{1}{x-3}$ est :

a) $\ln|x-3|$; b) 1 + ln(3-x) ; c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln(x-3)$; d) $1 - \ln|x-3|$. 1 pt

La bonne réponse est c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln(x-3)$

<u>EXERCICE 3</u> : / 05 Points

La répartition des candidats à un test de présélection suivant le total des points obtenus a donné le tableau suivant :

Total de points	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[
Nombre de candidats	27	43	38	28	21	3

1. a. Etablir le tableau des effectifs relatif à la série associée des centres de classes. 1 pt

Centre de classe (x)	25	35	45	55	65	75	
Nombre de candidats (n)	27	43	38	28	21	3	**160**
effectifs cumulés	27	70	108	136	157	160	
nx	675	1505	1710	1540	1365	225	7020
nx²	16875	52675	76950	84700	88725	16875	336800

b. En déduire la moyenne de cette série. 0,75 pt

Soit $\overline{x}$ la moyenne. On a :

$$\overline{x} = \frac{\sum nx}{N} = \frac{(25\times27)+(35\times43)+(15\times38)+(55\times28)+(65\times21)+(75\times3)}{160} = \frac{7020}{160} = 43{,}875$$

c. Calculer la variance et l'écart- type de cette série. 1,5 pt

Soit V la variance et σ l'écart type.

On a : $V = \frac{\sum nx^2}{N} - (\overline{x})^2 = \frac{336800}{160} - (43{,}875)^2 = 179{,}984375$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 13{,}4158$

2. Etablir le tableau des effectifs cumulés croissants. 1,75 pt

Voir le tableau ci-dessus

EXERCICE 4 : / 05 Points

Soit f la fonction de IR \ {2} vers IR défini par : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$

On désigne par (C) sa courbe réprésentative dans un repère orthonormé du plan.

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 1 pt

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

Lorsque x tend vers 2, on a : $\begin{cases} x^2-4x+5 \longrightarrow 1 \\ x-2 \longrightarrow 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$

b. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. 1 pt

f est dérivable sur IR \ {2} et on a : $f'(x) = \dfrac{(x^2-4x+5)'(x-2)-(x-2)'(x^2-4x+5)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x-2)-(1)(x^2-4x+5)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

f'(x) a même signe que $u(x) = x^2 - 4x + 3$

1 et 3 sont des racines évidentes de u(x).

x	-∞		1		2		3		+∞
$x^2 - 4x + 3$		+	0	-		-	0	+	
$(x - 2)^2$		+		+	0	+		+	
f '(x)		+	0	-	‖	-	0	+	

f(1) = - 2

f(3) = 2

Il vient que :

- f est croissante sur chacun des intervalles]-∞ , 1] et [3 , +∞[
- f est décroissante sur chacun des intervalles [1 , 2[et]2 , 3]
- f(1) = - 2 maximum relatif de f
- f(3) = 8 minimum relatif de f

▪ Tableau de variations

x	-∞		1		2		3		+∞
f '(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-2	↘	-∞ ‖ +∞	↘	2	↗	+∞

2. a. Montrer que pour tout x différent de 2, f(x) s'écrit aussi : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x-2}$ 0,5 pt

Soit un réel $x \neq 2$. On a : $x - 2 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{(x-2)^2+1}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+4+1}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+5}{x-2} = f(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]$ et en déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation cartésienne. 0,75 pt

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2} = 0$

Donc la droite (D) d'équation y = x − 2 est asymptote à la courbe (C) représentative de f en -∞ et en +∞.

c. Préciser la position relative de (C) et de (D). 0,5 pt

La position relative de (C) et (D) est déterminée par le signe de $f(x) - (x - 2) = \dfrac{1}{x-2}$

Il vient que :

➥ Pour x < 2 : f(x) – (x – 2) < 0 et donc (C) est en dessous de (D)

➥ Pour x > 2 : f(x) – (x – 2) > 0 et donc (C) est au dessus de (D)

3. Tracer (C) et (D). 1,25 pt