Epreuve de Mathématiques

SESSION 2006

EXAMEN : Baccalauréat A_4
Durée : 3 heures
Coefficient : 2

CORRIGÉ

Proposé par : **Equipe Educamer.org**

Exercice 1 : 5 points

I. Parmi les quatre réponses qui sont proposées une seule est juste. Recopier sur votre feuille de composition la réponse juste.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$ a pour solution le couple : 1 pt

a) : (1 ; 7)	b) : (7 ; 1)	c) : (-1 ; 7)	d) : (1 ; -7)

Réponse : b : (7 ; 1).

<u>Justification</u> (non demandée)

Procédons par la méthode dite par substitution. $\begin{cases} 3x + 2y = 23 & (1) \\ x - 7y = 0 & (2) \end{cases}$

(2) équivaut à $x = 7y$.

(2) dans (1) implique $3(7y) + 2y = 23$

$23y = 23$

D'où $y = 1$ et $x = 7$. Le couple solution du système est donc $(x ; y) = (7 ; 1)$.

2. Pour tous réels x et y strictement positifs le système $\begin{cases} 6x + 4y = 46 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$ est équivalent au système : 1 pt

a) : $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$	b) : $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x + 7y = 0 \end{cases}$	c) : $\begin{cases} 3x - 2y = 23 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$	d) : $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ -x - 7y = 0 \end{cases}$

Réponse : a) : $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 23} \\ \mathbf{x - 7y = 0} \end{cases}$

<u>**Rappel**</u> : Si a>0, b>0 alors :

- $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$

<u>Justification</u> (non demandée)
Soient x et y deux réels strictement positifs,

$\begin{cases} 6x + 4y = 46 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2(3x + 2y) = 46 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln 7 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \dfrac{x}{y} = 7 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x = 7y \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$

3. Le couple solution du système $\begin{cases} 6x + 4y = 46 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$ est : 1 pt

a) : (7 ; -1)	b) : (7 ; 1)	c) : (-1 ; 7)	d) : (1 ; -7)

Réponse : b) : (7 ; 1).

Justification (non demandée)
Ce système est celui de la question 1.

II. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) : $\begin{cases} 4x - y - z = 300 \\ -x + y - z = 300 \\ -x - y + 5z = 300 \end{cases}$ 2 pts

Procédons par la méthode du pivot de Gauss. (Aucune méthode n'étant imposée, on pourrait également procéder par substitution).

$\begin{cases} 4x - y - z = 300 \\ -x + y - z = 300 \\ -x - y + 5z = 300 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4x - y - z = 300 \\ 3y - 5z = 1500 & (L_2 \leftarrow L_1 + 4L_2) \\ -5y + 19z = 1500 & (L_3 \leftarrow L_1 + 4L_3) \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 4x - y - z = 300 \\ 3y - 5z = 1500 \\ 32z = 12000 & (L_3 \leftarrow 5L_2 + 3L_3) \end{cases}$

équivaut à $z = \dfrac{12000}{32} = 375$, $y = 1125$ et $x = 450$.

Conclusion : L'unique solution du système de (S) est le triplet (450 ; 1125 ; 375).

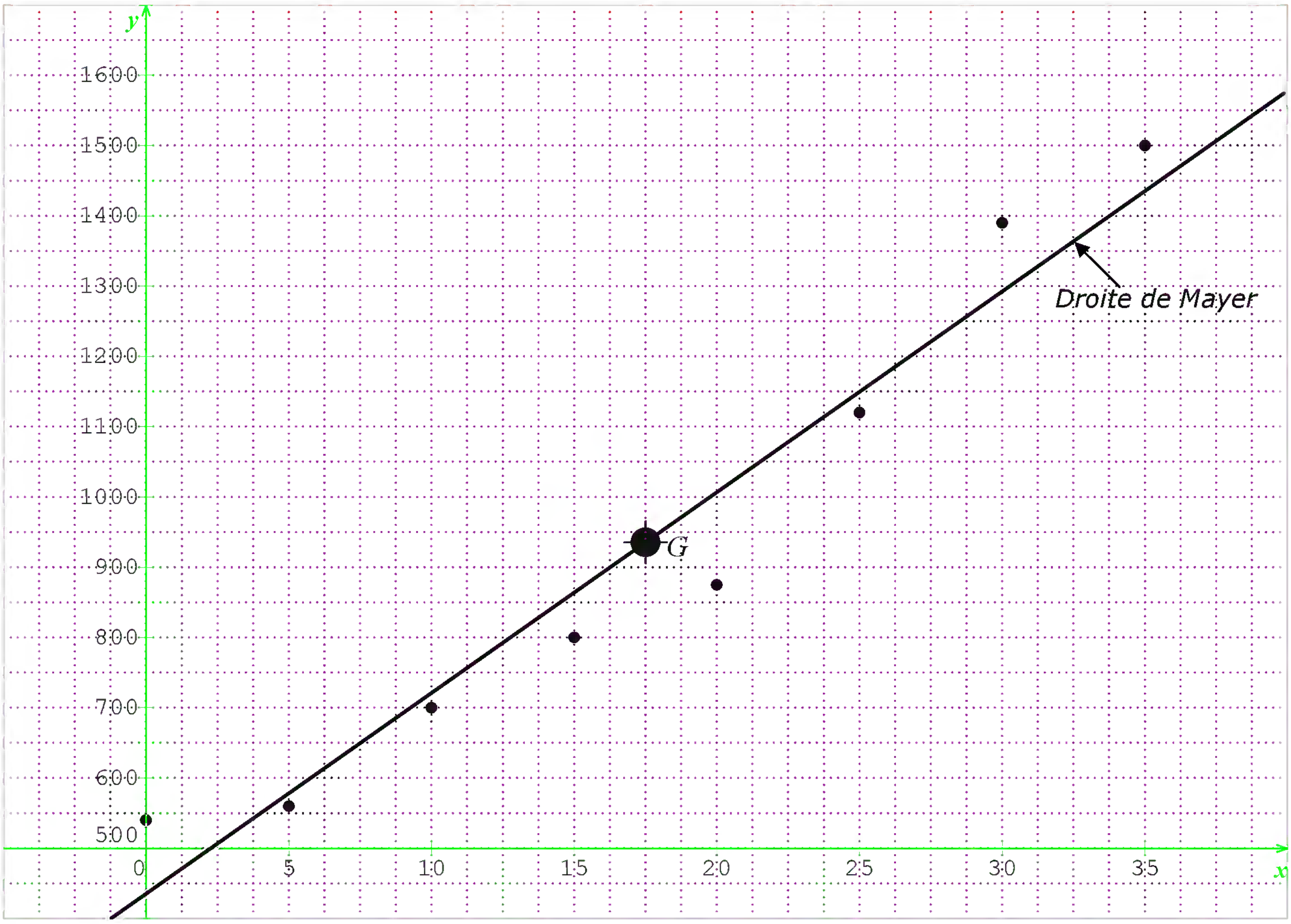
Exercice 2 : 5 points

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une localité du Cameroun.

Année	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang x_i de l'année	0	5	10	15	20	25	30	35
Population y_i	540	560	700	800	875	1120	1390	1500

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Unités sur les axes : 2cm pour 5 années sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées placer 500 à l'origine et prendre 1cm pour 100 habitants.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i ; y_i). 1,5 pt



2. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique puis le placer dans le plan. 1,5 pt

Par définition les coordonnées de G sont $\overline{x}$ et $\overline{y}$

$$\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} xi = \frac{1}{8}[5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35] = \frac{140}{8} = \frac{\cancel{2} \times 70}{\cancel{2} \times 4} = \frac{70}{4} = \frac{\cancel{2} \times 35}{\cancel{2} \times 2} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

$$\overline{y} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} yi = \frac{1}{8}[540+560+700+800+875+1120+1390+1500] = \frac{7485}{8} = 935{,}625.$$

D'où G(17,5 ; 935,625).

3. Déterminer une équation de la droite de Mayer et la tracer dans le plan. 1,5 pt

Nous partageons la série statistique de l'exercice en deux séries d'effectifs égaux :

Série 1

Rang xi de l'année	0	5	10	15
Population yi	540	560	700	800

Série 2

Rang xi de l'année	20	25	30	35
Population yi	875	1120	1390	1500

Désignons par G_1 le point moyen de la série 1 et G_2 le point moyen de la série 2.

La droite de Mayer est la droite (G_1G_2).

- Déterminons les coordonnées des points G_1 et G_2

$\overline{x_1} = \frac{1}{4}(0+5+10+15) = 7,5$ et $\overline{y_1} = \frac{1}{4}(540+560+700+800) = 650$ donc **$G_1(7,5 ; 650)$**

$\overline{x_2} = \frac{1}{4}(20+25+30+35) = 27,5$ et $\overline{y_2} = \frac{1}{4}(875+1120+1390+1500) = 1221,25$

donc **$G_1(27,5 ; 1221,25)$**

- Déterminons une équation cartésienne de la droite (G_1G_2) ou droite de Mayer :
  Cette équation est de la forme $y = ax + b$.
  On sait que $a = \frac{Y_{G2} - Y_{G1}}{X_{G2} - X_{G1}} = \frac{1221,25 - 650}{27,5 - 7,5} = \frac{571,25}{20} = 28,5625$

  $G_1 \in (G_1G_2)$ donc $Y_{G1} = aX_{G1} + b$; d'où $b = Y_{G1} - aX_{G1} = 650 - 28,5625 \times 7,5 = 435,78125$

Conclusion : Une équation cartésienne de la droite de Mayer est : **$y = 28,5625x + 435,78125$**

4. Donner une estimation de la population de cette chefferie en 2010 0,5 pt

D'après ce qui précède,

une estimation de la population y au cours le l'année de rang x est : **$28,5625x + 435,78125$.**

En 2010, $x = 2010 - 1965 = 45$; par conséquent $y = 28,5625 \times 45 + 435,78125 = 1721,09375$.

Conclusion : La population en 2010 de cette localité sera estimée à 1721 habitants.

Exercice 3 : 5 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - 1 - 2\ln x$,
où lnx désigne le logarithme népérien de x.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unités sur les axes : 2cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f. 0,5 pt

le réel f(x) est défini si, et seulement si x > 0.

Donc l'ensemble de définition de f est :]0 ; +∞[.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0,5 pt

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - 1 - 2\ln x = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 - 2\ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$

En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Déterminer la dérivée f' de f et étudier son signe. 0,75 pt

- f est une somme de fonctions dérivables sur]0 ; +∞[, donc f est dérivable sur cet intervalle.

  Pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - 0 - 2\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

- Signe de f'(x) :

  x étant strictement positif, le signe de f'(x) dépend de celui de x − 2.

Conclusion : $\begin{cases} f' < 0 \text{ sur }]0\,,2[\\ f' > 0 \text{ sur }]2\,,+\infty[\\ f'(2) = 0 \end{cases}$.

b) En déduire le tableau de variation de f. 0,75 pt

x	0		2		+∞
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	1−2ln2	↗	+∞

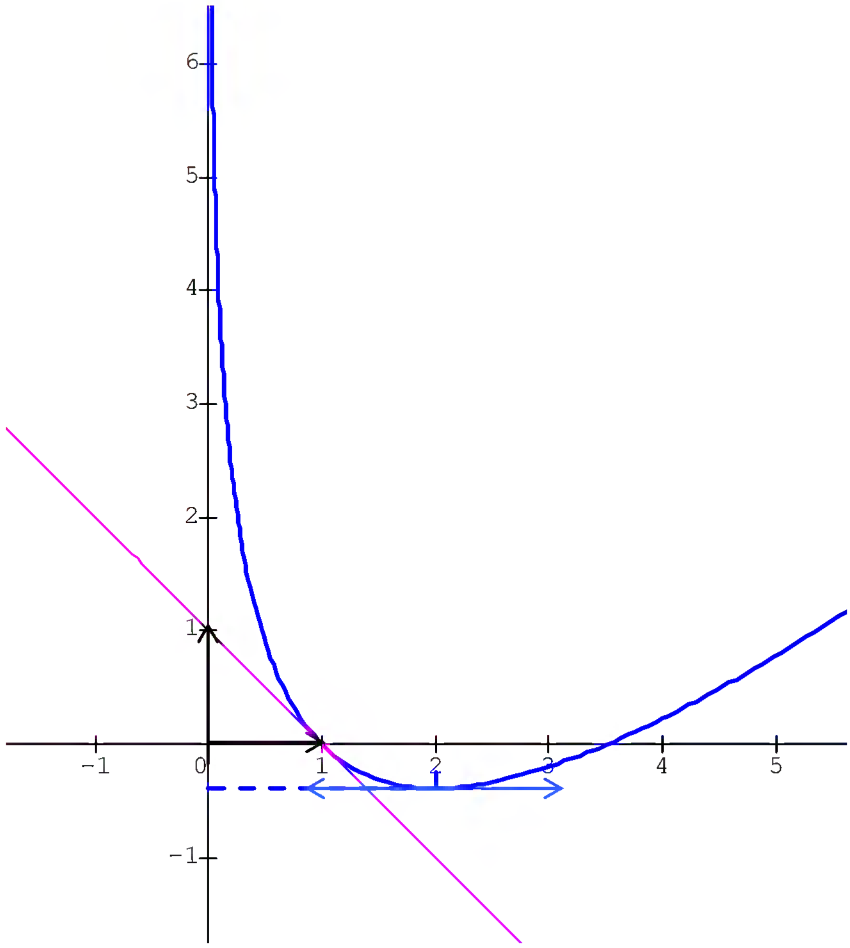
3. a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1 0,5 pt

(T) : y = f'(1)(x -1) + f(1)

y = (-1)(x -1) + 0

D'où (T) : y = -x + 1.

b) Tracer C_f et (T) dans le même repère. 2 pts



Exercice 4 : 5 points

Une étude sur 200 employés d'une entreprise, travaillant dans quatre succursales, appelées A, B, C et D a donné les résultats suivants :

Succursales	A	B	C	D	Total
Hommes	23	47		40	140
Femmes	13		25	12	
Total		57			200

1. Recopier et compléter le tableau suivant : 2 pts

Succursales	A	B	C	D	Total
Hommes	23	47	30	40	140
Femmes	13	10	25	12	60
Total	36	57	55	52	200

2. On choisit au hasard, une personne parmi les employés de l'entreprise.
   Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- E_1 : « Cette personne travaille dans la succursale D ». 0,75 pt

  $p(E_1) = \frac{52}{200} = \frac{13}{50}$.

- E_2 : « cette personne est un homme travaillant dans la succursale B ». 0,75 pt

  $p(E_2) = \frac{47}{200}$.

- E_3 : « cette personne est une femme travaillant dans la succursale C ». 0,75 pt

  $p(E_3) = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

- E_4 : « cette personne travaille dans l'une des succursale A ou B ». 0,75 pt

  $p(E_4) = \frac{36 + 57}{200} = \frac{93}{200}$.