## Exercice 1

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $A_n = 3^{2n} - 2^n$ et $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

1. Démontrer par récurrence que :
   (a) $A_n$ est multiple de 7.
   (b) $B_n$ est multiple de 7.
2. En déduire que les nombres $3^{28} - 2^{14}$ et $3^{83} + 2^{43}$ ne sont pas premiers entre eux.

## Exercice 2

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,
on considère l'application $f$ qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
On note $z$ l'affixe de $M$ et $z'$ l'affixe de $M'$.

1. (a) Exprimer $z'$ en fonction de $z$.
   (b) Démontrer que $f = ros$ où $s$ est la réflexion d'axe $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $r$ une rotation affine à préciser.
2. En décomposant $r$ en deux réflexions, démontrer que $f$ est une réflexion et préciser son axe.
3. On note $g$ l'application du plan qui a tout point $M(x, y)$ associe le point $M''(x'', y'')$ tel que
   $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y'' = x + 1 \end{cases}$
   On note $z$ l'affixe de $M$ et $z''$ l'affixe de $M''$
   (a) Exprimer $z''$ en fonction de $z$.
   (b) Déterminer la nature de l'isométrie $t$ telle que $g = tof$.
   (c) On note $K$ le milieu du segment $[MM'']$,
   démontrer que $K$ appartient à une droite fixe lorsque $M$ parcourt le plan.

## PROBLEME

Les deux parties $A$ et $B$ sont indépendantes.

### Partie A

$E$ désigne l'espace affine euclidien de dimension 3 et $\alpha$ un nombre réel strictement positif.
On considère le carré $ABCD$ de centre $O$.

1. Vérifier que $O$ est l'isobarycentre du système $A, B, C, D$.
   Sur la figure ci-contre (voir ci-dessous), le point $E$ n'appartient pas au plan $(ABCD)$,
   on donne $EA = EB = EC = ED = 2\alpha$ ; $AC = BD = \alpha$
2. (a) Démontrer que la droite $(EO)$ est orthogonale au plan $ABCD$.
   $(Sm)$ désigne l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que :
   $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = m\alpha^2$
   (b) Déterminer $(Sm)$ suivant les valeurs de $m$.
3. On suppose la droite $(EO)$ orientée par le vecteur $\overrightarrow{OE}$ et l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ de mesure $\pi/2$ ;
   on note $r$ la rotation d'axe $(EO)$ et d'angle $\pi/2$
   Déterminer les images par $r$ des points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$.
   En déduire que $ABCDE$ est invariant par $r$.

## Partie B

$F$ est la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ ,
$C$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan,
l'unité de longueur sur les axes est le centimètre.

1. Calculer les limites de $f$ en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche et à droite du point $1$, puis la dérivée de $f$.
   En déduire le tableau de variation de $f$.
2. Préciser les branches infinies de $f$ et tracer $C$
3. On se propose de déterminer un encadrement de l'aire $a$ de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, $C$ et la droite d'équation $x=0,5$.
   (a) Vérifier que pour tout $x\in[0;0,5]$ , $\dfrac{1}{1-x}=1+x+\dfrac{x^2}{1-x}$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{e^{-t}}{1-t}dt=\int_0^{0,5}(1+t)e^{-t}dt+\int_0^{0,5}\frac{t^2e^{-t}}{1-t}dt$
4. (a) Démontrer que, pour tout $x\in[0;0,5]$, $1\leq f(x)\leq\dfrac{2}{\sqrt{e}}$
   (b) En déduire que $\displaystyle\frac{1}{24}\leq\int_0^{0,5}\frac{t^2e^{-t}}{1-t}dt\leq\frac{1}{12\sqrt{e}}$
5. En déduire que :
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{0,5}(1+t)e^{-t}dt$
   (b) Déduire des questions précédentes un encadrement de $a$.