Bac probatoire Cameroun 2022

Mathématiques série C/ E

Durée : 3 heures

Coefficient : 6 / 5

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 (3,5 points)

1. Résoudre dans] -π ;π] l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ·
2. Exprimer $\cos^2 t + \tan^2 t + \sin^2 t$ en fonction de $\cos t$ ·
3. Déterminer deux réels A et φ tels que $\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) = A\sin(2t+\varphi)$ ·

Exercice 2 (3 points)

f est le polynôme défini pour tout réel x par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{31}{6}$ ·

1. **a.** Montrer que la courbe de f passe par le point de coordonnées (-1 ; 0).
   b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans **R** .

2. **a.** Calculer pour tout réel x , f ' (x) où f ' désigne la fonction dérivée de f .
   b. Etudier le sens des variations de f sur **R**.

Exercice 3 (3,5 points)

A , B et C sont trois points non alignés du plan et D le barycentre du système (A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 1).

1. Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M, associe le point M ' tel que $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MM'}$.
   a. Justifier que h ne peut être une translation.
   b. Montrer que $\overrightarrow{DM'} = 2\,\overrightarrow{DM}$.
   c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de h .

2. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$ et φ l'endomorphisme du plan vectoriel E_2 défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{j}) = m\vec{i} + 3\vec{j} \text{ où } m \text{ est un réel donné .}$$

   a. Justifier que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.
   b. Ecrire la matrice E de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   c. Déterminer la valeur de m pour que φ ne soit pas un automorphisme de E_2.

Exercice 4 (5 points)

1. Dire pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse :
   a. Deux droites de l'espace, perpendiculaires chacune à une troisième, sont parallèles.
   b. Pour montrer que deux droites de l'espace sont orthogonales, il suffit de trouver un plan contenant l'une des deux droites, auquel l'autre est orthogonale.

2. L'espace est rapporté au repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $(P) : 2x - y + z - 1 = 0$ et $(Q) : x + y - z + 2 = 0$.

a. Montrer que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.

b. Donner par ses coordonnées un point, et par ses composantes un vecteur non nul de la droite commune à (P) et (Q).

Partie B : Évaluation des compétences (5 points)

Des jeunes veulent mettre sur pied une petite et moyenne entreprise (PME), de production et de vente d'un article donné. L'étude de faisabilité réalisée pour ce projet montre que le coût de production en FCFA d'un nombre x de cet article est : $C(x) = x^2 + 202500$.
Le prix de vente d'une unité de cet article est fixé à 1500 FCFA.
La capacité de production de cet article par cette PME est limitée à 1300 unités.

Pour un début, il y a six postes de responsabilités dans cette PME. Dix demandes ont été sélectionnées, présentant les mêmes atouts et donnant ainsi lieu à de sérieuses difficultés de choix. La direction décide donc de mettre dans des enveloppes coûtant 100 FCFA l'unité, et à raison d'un groupe dans une enveloppe, les différents groupes des noms des six potentiels responsables, pour un tirage au sort. Une somme de 12500 FCFA a été prévue pour l'achat de ces enveloppes.

Ces jeunes décident de contracter un prêt de dix millions de FCFA sur une période de cinq ans, auprès d'une coopérative de la place pour un taux de 12,5 % d'intérêt annuel et composé. Pour maximiser son décollage, cette PME ne fera aucun remboursement entre temps. En revanche, ce groupe de jeunes a un parrain qui a accepté d'hypothéquer ce prêt par le titre foncier de son terrain dont les experts en affaires financières ont estimé la valeur à environ dix-huit millions de FCFA, cinq années après la période de demande du prêt.

Tâches :

1. Quel est le nombre minimum de cet érticle que cette PME doit produire pour espérer réaliser un bénéfice ?

2. Le budget prévu pour l'achat des enveloppes sera-t-il suffisant ?
3. La coopérative doit-elle offrir ce prêt sans courir de risque aussi petit soit-il, en cas de non remboursement au bout de cinq années ?

Correction

Partie A

Exercice 1

1) On a :

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6} \iff \begin{cases} 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ \\ 2x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}+2k'\pi \end{cases} ,k,k'\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ \\ 2x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}+2k'\pi \end{cases} ,k,k'\in\mathbb{Z} \iff \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ \\ 2x=\dfrac{\pi}{6}+2k'\pi \end{cases} ,k,k'\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k'\pi \end{cases} ,k,k'\in\mathbb{Z}$$

On ne garde que les valeurs de x dans l'intervalle imposé $]-\pi;\pi]$.

- Pour $k=-2$: $x=\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}\notin]-\pi;\pi]$.
- Pour $k=-1$: $x=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$.
- Pour $k=0$: $x=\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$.
- Pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{4}+\pi\notin]-\pi;\pi]$.

- Pour $k=-2$: $x=\frac{\pi}{12}-2\pi=-\frac{23\pi}{12}\notin]-\pi;\pi]$.
- Pour $k=-1$: $x=\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}\in]-\pi;\pi]$.
- Pour $k=0$: $x=\frac{\pi}{12}\in]-\pi;\pi]$.
- Pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{12}+\pi\notin]-\pi;\pi]$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est : } S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right\}}$$

2) Exprimons $\cos^2 t+\tan^2 t+\sin^2 t$ en fonction de $\cos t$.

Le fait que $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, tel que $k\in\mathbb{Z}$, est sous-entendu .

On a , pour tout réel $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$\sin^2 t=1-\cos^2 t \quad \text{et} \quad \tan^2 t=\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2=\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}$$

D'où , pour tout réel $t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\cos^2 t + \tan^2 t + \sin^2 t &= \cos^2 t + \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} + 1 - \cos^2 t \\
&= \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} \\
&= \frac{1-\cos^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} \\
&= \frac{1}{\cos^2 t}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ \right\} \ : \quad \cos^2 t + \tan^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{1}{\cos t} \right)^2}$$

3) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $A\sin(2t+\varphi) = A(\sin 2t \ \ \cos\varphi + \cos 2t \ \ \sin\varphi) = A\sin 2t \ \ \cos\varphi + A\cos 2t \ \ \sin\varphi$

Donc , par identification :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos 2t - \sin 2t = A\sin(2t+\varphi) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos 2t - \sin 2t = A\sin 2t \ \ \cos\varphi + A\cos 2t \ \ \sin\varphi \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A\cos\varphi = -1 \\ A\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Calcul de A :

$$(A\cos\varphi)^2 + (A\sin\varphi)^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \iff A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1 + 3 \iff A^2 = 4 \iff \begin{cases} A = 2 \\ \text{ ou} \\ A = -2 \end{cases}$$

On peut maintenant en déduire φ :

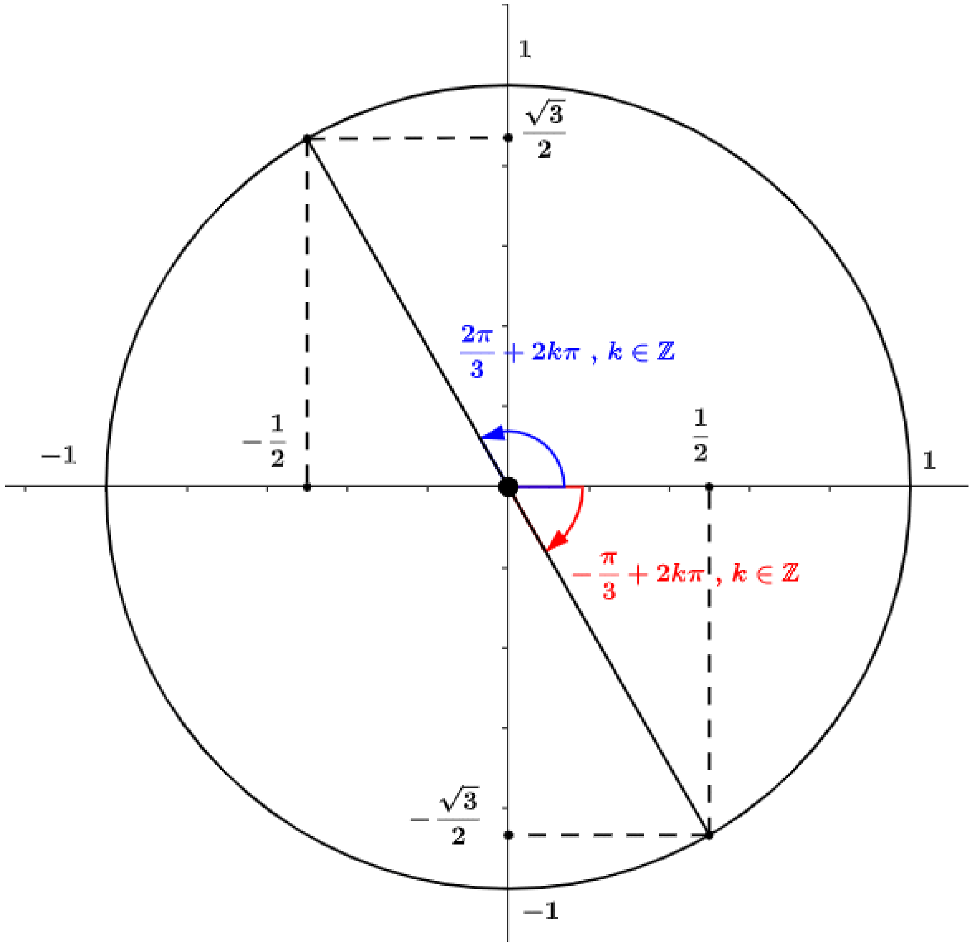
- Si $A = -2$, alors :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -1 \\ A\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

- Si $A = 2$, alors :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -1 \\ A\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Illustration :



On trouve une infinitié de valeurs qui conviennent :

$$\boxed{\begin{array}{c} A = 2 \text{ et } \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ A = -2 \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

Remarque : Ici , on a trouvé tous les cas possibles pour A et φ , tandis que l'examinateur ne nous demande qu'un seul . Par exemple $A = 2$ et $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ est une réponse suffisante et donc valide .

Exercice 2

f est le polynôme défini pour tout réel x par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{31}{6}$.

Pour simplifier les calculs, on factorise par $\frac{1}{6}$, on obtient : $f(x) = \frac{1}{6}(2x^3 + 9x^2 - 24x - 31)$

1-a) On a : $f(-1) = \frac{1}{6}(-2 + 9 + 24 - 31) = \frac{1}{6}(-33 + 33) = 0$

Donc :

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ passe par le point de coordonnées } (-1; 0)}$$

b) Puisque $f(-1) = 0$, alors -1 est racine du polynôme f , il s'ensuit qu'on peut factoriser par le binôme $x + 1$.

Procédons par une division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrrrr|c}
2x^3 & + & 9x^2 & - & 24x & - & 31 & x+1 \\
\cline{8-8}
-2x^3 & - & 2x^2 & & & & & 2x^2+7x-31 \\
\cline{1-3}
 & & 7x^2 & - & 24x & & & \\
 & - & 7x^2 & - & 7x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & - & 31x & - & 31 & \\
 & & & + & 31x & + & 31 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

*Onentirequepourtoutréel*x∈ $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{6}(x+1)(2x^2+7x-31)$

Calculons le discriminant du trinôme $2x^2 + 7x - 31$: $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-31) = 297 > 0$

Le trinôme admet donc deux racines réelles <u>distinctes</u> , vérifions que ces deux racines réelles sont différentes de -1 , sinon , on aurait affaire à une racine double .

Puisque : $2 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) - 31 = 2 - 7 - 31 = -36 \neq 0$. -1 n'est donc pas une racine du trinôme $2x^2 + 7x - 31$

Alors le trinôme $2x^2 + 7x - 31$ admet exactement deux racines réelles distinctes et différentes de -1 , par conséquent , le polynôme f admet exactement trois racines réelles distinctes dont une est -1 , ou encore :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet exactement trois solutions dans } \mathbb{R}}$$

2-a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{31}{6}\right)' \\
&= 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2 \times \frac{3}{2}x - 4 \\
&= x^2 + 3x - 4
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = x^2 + 3x - 4}$$

b) Calculons le discriminent de $f'(x)$: $\Delta' = 3^2 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$

$f'(x)$ admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$

Et puisque le coefficient dominant est $1 > 0$ (le coefficient dominant est le coefficient devant le monôme de plus haut degré , qui est x^2 ici) , donc $f'(x)$ est de signe <u>positif</u> à l'extérieur des solutions -4 et 1.

On dresse alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de la fonction f :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est croissante sur }]-\infty;-4] \cup [1;+\infty[\\ \text{et } f \text{ est décroissante sur } [-4;1] \end{array}}$$

Exercice 3

1-a) On a :

$$\begin{array}{lcc} M' = h(M) & \iff & \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \\ & \iff & \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} \\ & \iff & \overrightarrow{MM'} = -\underbrace{\left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DM} \\ & \iff & \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{DM} \end{array}$$

En effet $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ car : $D = \text{bary}\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$

h ne peut pas être une translation , car le vecteur $\overrightarrow{MM'}[/tex]estégalauvecteur[tex]\overrightarrow{DM}$, qui lui , n'est pas constant est dépend de M .

Conclusion :

$$\boxed{h \text{ n'est pas une translation}}$$

b) D'après ce qui précède : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{DM}$. On a donc directement :

$$\overrightarrow{DM'} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DM}$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{DM'} = 2\overrightarrow{DM}}$$

c) Puisque $\overrightarrow{DM'} = 2\overrightarrow{DM}$ et $h(M) = M'$, donc , par définition :

$$\boxed{h \text{ est l'homothétie de centre } D \text{ et de rapport } 2}$$

2-a) A, B et C sont des points non alignés , donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires .

D'où les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinaires , donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \vec{i} \text{ et } \vec{j} \text{ forment une base du plan}}$$

b) φ est l'endomorphisme défini par :

$\varphi(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = m\vec{i} + 3\vec{j}$ où m est un réel donné .

La matrice E de l'endomorphisme φ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ s'écrit donc :

$$\boxed{E = \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

c) On a :

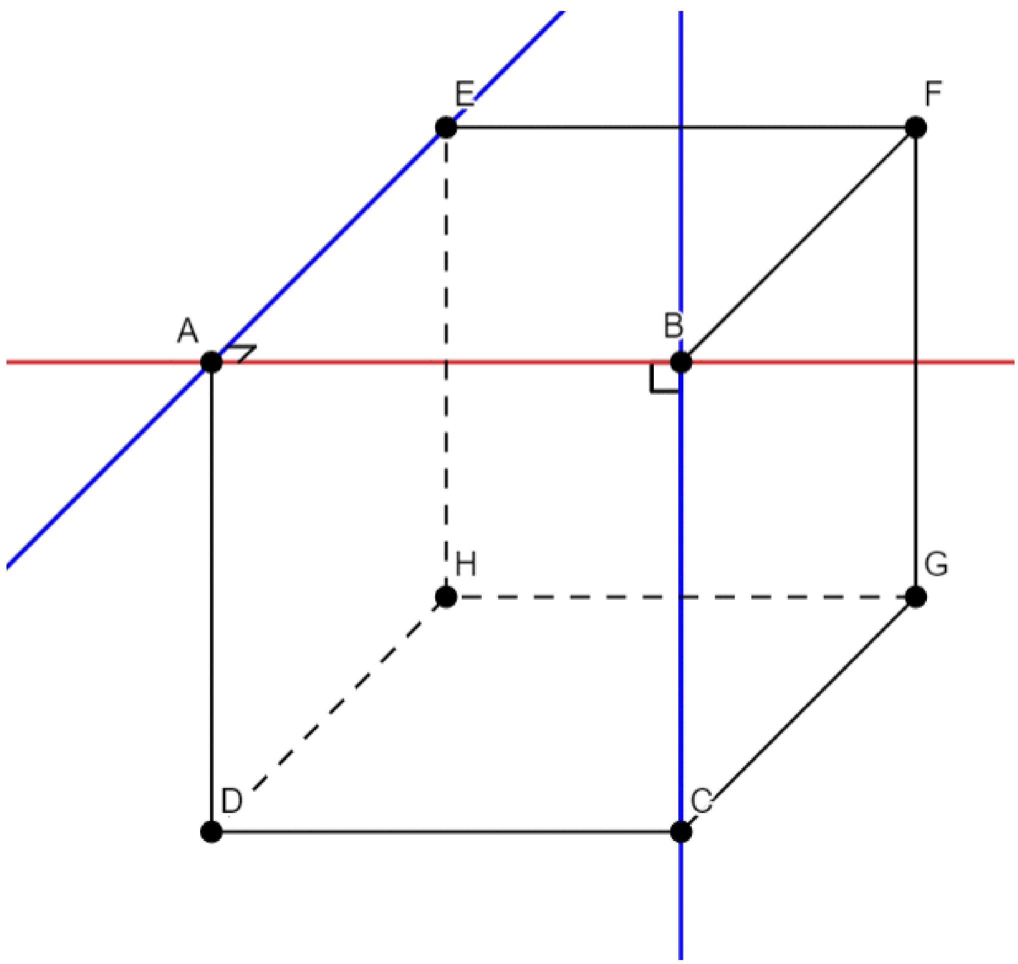
$$\begin{aligned} \varphi \text{ n'est pas un automorphisme} &\iff \det(E) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 6 - m = 0 \\ &\iff \boxed{m = 6} \end{aligned}$$

Exercice 4

1-a) **Affirmation fausse**

Pour que deux droites de l'espace soient parallèles , elle doivent être coplanaires .

Et deux droites de l'espace , perpendiculaires chacune à une troisième peuvent ne pas être coplanaires comme illustré dans la figure ci-dessous :



Ici , les deux droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires à la droite (AB) , mais (AE) et (BC) ne sont pas coplanaires , donc elles ne sont pas parallèles .

b) **Affirmation vraie**

En effet , d'après la définition de l'orthogonalité d'une droite à un plan :

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan

.

2-a) Les équations des plans (P) et (Q) sont respectivement : $(P) : 2x-y+z-1=0$ et $(Q) : x+y-z+2=0$.

Donc $\vec{n}(2;-1;1)$ et $\vec{n'}(1;1;-1)$ sont des vecteurs normaux respectifs aux plans (P) et (Q) .

Puisque les composantes de ces vecteurs ne sont pas respectivement proportionnelles , alors ils ne sont pas colinéaires .

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{Les deux plans } (P) \text{ et } (Q) \text{ ne sont pas parallèles}}$$

b) La droite commune à (P) et (Q) est la droite d'intersection de ces deux plans .

Soit alors le point $M(x,y,z) \in (P) \cap (Q)$

On a donc :

$$M(x,y,z) \in (P) \cap (Q) \iff \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-z=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ -y+z=1+\dfrac{2}{3} \\ y-z=-2+\dfrac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ -y+z=\dfrac{5}{3} \\ y-z=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

En posant $y=t$; avec $t \in \mathbb{R}$ un paramètre réel , on obtient une représentation paramétrique de la droite commune à (P) et (Q) :

$$(P) \cap (Q) : \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=t \\ z=t+\dfrac{5}{3} \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

On en tire directement les composantes d'un vecteur directeur $\vec{\delta}$ non nul de la droite $(P) \cap (Q)$:

$$\boxed{\vec{\delta}(0;1;1)}$$

Et en remplaçant par $t = 0$ par exemple , on obtient les coordonnées d'un point $M_0 \in (P) \cap (Q)$:

$$\boxed{M_0\left(-\frac{1}{3};0;\frac{5}{3}\right)}$$

PARTIE B

1) Notons B la fonction bénéfice .

Puisque le prix de vente d'une unité de cet article est fixé à **1500 FCFA** , donc le prix de vente d'un nombre x d'articles est $1500x$.

De plus , le coût de production en **FCFA** d'un nombre x de cet article est : $C(x) = x^2 + 202500$

Alors , pour $x \in [0;1300]$, (car la capacité est limitée à 1300 articles) :

$$B(x) = 1500x - C(x) \iff \boxed{B(x) = -x^2 + 1500x - 202500}$$

Etudions le signe du trinôme $B(x)$ sur $[0;1300]$, , calculons pour cela son discriminent Δ :

$\Delta = 1500^2 - 4 \times 202500 = 1440000 = (1200)^2 > 0$

Le trinôme $B(x)$ admet donc deux racines dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = \dfrac{-1500 - 1200}{-2} = 1350$ et $x_2 = \dfrac{-1500 + 1200}{-2} = 150$

Seule la racine $150 \in [0;1300]$, donc le tableau de signe de $B(x)$ sur $[0;1300]$ est :

x	0		150		1300
$B(x)$		$-$	0	$+$	

La PME realisera un bénéfice si et seulement si la fonction bénéfice B est strictement positive , donc si et seulement si $x > 150$

On conclut alors que :

$$\boxed{\text{Le nombre minimal d'articles à produire afin de réaliser un bénéfice est 151}}$$

2) Il y a **six** postes de responsabilités dans cette PME. **Dix** demandes ont été sélectionnées .

Le nombre de groupes possibles à consituer est donc : $\binom{10}{6} = 210$

Alors le budget alloué à l'achat des enveloppes est : $210 \times 100 = 21000$ F CFA .

Seule la somme de **12500 FCFA** a été prévue pour l'achat de ces enveloppes et $12500 < 21000$

$$\boxed{\text{Le budget prévu pour l'achat des enveloppes ne suffira pas}}$$

3) Puisque le taux d'intérêt composé annuel est de $12,5\%$.

Alors , on utilise la suite (u_n) avec $n \in \mathbb{N}$, définie par :

$u_0 = 10000000$ le prêt initial

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1,125 u_n$, avec :

- u_n le montant à rembourser à la n-ième année
- u_{n+1} le montant à rembourser à l'année $n+1$

En effet , augmenter de $12,5\%$ revient à multiplier par $1,125$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $1,125$ et de premier terme $u_0 = 10000000$

On a donc , pour tout entier naturel n , le montant à rembourser à l'année n est :

$$u_n = u_0(1,125)^n = 10000000 \times (1,125)^n$$

Au bout de la cinqième année , le montant à rembourser s'élève à :

$$u_5 = 10000000 \times (1,125)^5 \approx 18020325 \text{ F CFA } \geqslant 18000000 \text{ F CFA}$$

D'où :

$$\boxed{\text{La coopérative court un risque en cas de non remboursement au bout de cinq années .}}$$