

# Bac Burkina Faso 2022

## Mathématiques Série G2

1er tour  
Durée : 2 heures  
Coefficient : 3

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

### Exercice 1 (8 points)

Une entreprise étudie l'évolution du pourcentage de femmes parmi ses employés . Le tableau suivant donne , pour les années indiquées , l'évolution du pourcentage de femmes dans l'entreprise :

| Année             | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|
| Rang $(x)$        | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
| Pourcentage $(y)$ | 6    | 8,5  | 9,5  | 11   | 12   | 13   |

- 1) Représenter le nuage de points  $(x, y)$  dans un repère orthogonal .  
Echelle :
  - **1cm** pour 1 rang sur l'axe des abscisses et
  - **1cm** pour 2% sur l'axe des ordonnées .
- 2) Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  de cette série statistique .
- 3) On note  $G_1$  le point moyen partiel des trois premiers points et  $G_2$  celui des trois derniers .
  - a) Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_2$  puis tracer la droite  $(G_1G_2)$  .
  - b) Déterminer l'équation de la droite  $(G_1G_2)$  sous la forme  $y = mx + p$  où  $m$  et  $p$  seront donnés sous forme de fraction irréductible .
- 4-a) Déterminer graphiquement une estimation du pourcentage de femmes parmi les employés en 2023 .  
b) Par un calcul , déterminer l'année où le pourcentage de femmes atteindra 24% .

### Problème (12 points)

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (unité graphique **1cm**) .

- 1-a) Préciser l'ensemble de définition de  $f$  .  
b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition , en déduire que la courbe  $(C)$  admet une asymptote dont on précisera une équation .
- 2-a) Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe .  
b) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation .

3) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0 .

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(C)$  avec les axes de coordonnées .

5-a) Tracer la courbe  $(C)$  et la tangente  $(T)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

b) A l'aide de la représentation graphique de  $f$  , donner suivant les valeurs du réel  $m$  , le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$  .

6) Vérifier que la fonction numérique  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  .

7) Calculer l'aire  $A$  de la partie  $E$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que :  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$  .

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$  .

On donne  $f(2) \approx 7,4$  ;  $f(-2) = 1,2$  ;  $f(-3) = 0,8$  ;  $f(1,5) = 1,1$  ;  $\frac{4}{e} = 1,5$  .



## Correction

### Exercice 1

1) Voi la figure à la fin pour le nuage de points  $(x, y)$  :

2) Les coordonnées du point moyen  $G(\bar{x}, \bar{y})$  sont tels que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont respectivement les moyennes des  $x_i$  et  $y_i$  .

On a :

- $\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5$
- $\bar{y} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 y_i = \frac{1}{6}(6 + 8,5 + 9,5 + 11 + 12 + 13) = \frac{60}{6} = 10$

Le point moyen  $G$  de cette série statistique a pour coordonnées  $G(3,5;10)$

3-a)

- Calcul des coordonnées du point moyen  $G_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$  :

On a : 
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = \frac{6}{3} = 2 \\ \bar{y}_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i = \frac{1}{3}(6 + 8,5 + 9,5) = \frac{24}{3} = 8 \end{cases}$$

Donc :

$G_1(2;8)$  est le point moyen des trois premiers points

- Calcul des coordonnées du point moyen  $G_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$  :

On a : 
$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i = \frac{1}{3}(4 + 5 + 6) = \frac{15}{3} = 5 \\ \bar{y}_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i = \frac{1}{3}(11 + 12 + 13) = \frac{36}{3} = 12 \end{cases}$$

Donc :

$G_2(5;12)$  est le point moyen des trois derniers points

b) Notons  $(G_1G_2) : y = mx + p$  une équation cartésienne de la droite  $(G_1G_2)$  .

On a alors :  $m = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{12 - 8}{5 - 2} = \frac{4}{3}$

On remplace  $m$  par sa valeur dans l'équation :  $(G_1G_2) : y = \frac{4}{3}x + b$

On sait que  $G_1$  est un point de  $(G_1G_2)$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 = \frac{4}{3}\bar{x}_1 + p &\iff 8 = \frac{4}{3} \times 2 + p \\ &\iff p = 8 - \frac{8}{3} \\ &\iff p = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Conclusion :

L'équation cartésienne de la droite  $(G_1G_2)$  s'écrit :  $y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$

4-a) Pour déterminer graphiquement cette estimation , il faut construire la droite  $(G_1G_2)$ .

L'année 2023 correspond au rang  $x = 8$  , et d'après le graphique , l'image de ce rang par la droite  $(G_1G_2)$  est  $y = 16\%$

Donc :

Le pourcentage de femmes parmi les employés en 2023 est estimé à 16%

b) Par calcul , on a :

$$\begin{aligned} y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} &\iff y - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}x \\ &\iff x = \frac{3}{4} \left( y - \frac{16}{3} \right) \end{aligned}$$

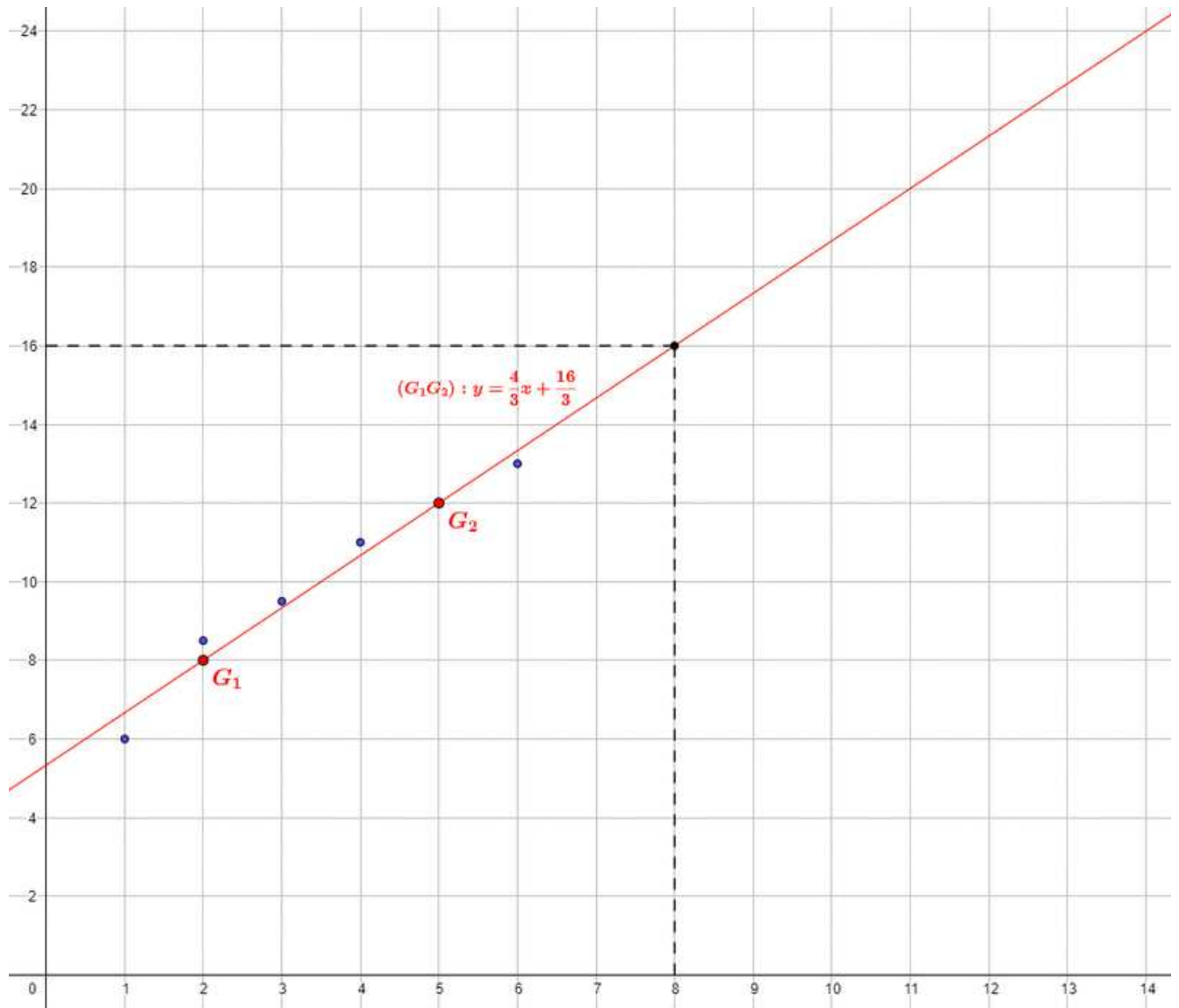
Alors , si  $y = 24\%$  , le rang est  $x = \frac{3}{4} \left( 24 - \frac{16}{3} \right) = \frac{3 \times 24}{4} - \frac{16}{4} = 18 - 4 = 14$

Enfin , le rang  $x = 14$  correspond à l'année 2029 .

Conclusion :

Le pourcentage de femmes atteindra 24% en 2029

**Figure :**



### Problème

1-a) La fonction  $f$  est un produit d'une fonction polynomiale et de la fonction exponentielle , donc , elle est définie dans  $\mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

b) En  $-\infty$  :

On a , pour tout réel  $x$  :  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x = x^2e^x - 2xe^x + e^x$

Or , on nous donne :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

De plus , on sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x - 2xe^x + e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- Interprétation graphique :

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$

En  $+\infty$  :

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**Remarque :**

On peut aussi interpréter graphiquement la limite en  $+\infty$  (pas demandé! )

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors il faut calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) e^x$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) e^x = +\infty$

Alors :

La courbe  $(C)$  admet une branche parabolique de la direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$

2-a) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^2 - 2x + 1)e^x]' \\ &= (x^2 - 2x + 1)'e^x + (x^2 - 2x + 1)(e^x)' \\ &= (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 1)e^x \\ &= (x^2 - 1)e^x \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 - 1)e^x$$

Puisque  $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , alors le signe de  $f'(x)$  est celui de  $x^2 - 1$ .

Or, on sait que  $x^2 - 1$  admet deux racines  $-1$  et  $1$ , alors son tableau de signe est :

| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x^2 - 1$ |           | $+$  | $0$ | $-$       |

D'où le signe de  $f'(x)$  :

|                                                 |   |                |
|-------------------------------------------------|---|----------------|
| $\forall x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ | : | $f'(x) \geq 0$ |
| $\forall x \in [-1; 1]$                         | : | $f'(x) \leq 0$ |

b) On a, d'après ce qui précède :

|                                                           |
|-----------------------------------------------------------|
| $f$ est croissante sur $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ |
| $f$ est décroissante sur $[-1; 1]$                        |

D'autre part, on a :

- $f(-1) = ((-1)^2 - 2(-1) + 1)e^{-1} = \frac{1 + 2 + 1}{e} = \frac{4}{e}$
- $f(1) = (1^2 - 2 \times 1 + 1)e^1 = 0 \times e = 0$

Ce qui permet de dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$       | $1$        | $+\infty$  |
|---------|-----------|------------|------------|------------|
| $f'(x)$ |           | $+$        | $0$        | $-$        |
| $f$     |           | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

3) Une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $0$  est par définition :

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Or, on a :

- $f(0) = (0^2 - 2 \times 0 + 1)e^0 = 1 \times 1 = 1$
- $f'(0) = (0^2 - 1)e^0 = -1 \times 1 = -1$

Donc, l'équation de la tangente  $(T)$  est :

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff (T) : y = -1 \times x + 1 \iff \boxed{(T) : y = -x + 1}$$

4)

• Intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses  $(O, \vec{i})$  :

Pour trouver les points d'intersection , on résoud l'équation  $f(x) = 0$  :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x^2 - 2x + 1)e^x = 0 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 && (\text{En effet , } e^x > 0 \text{ pour tout réel } x) \\ &\iff (x - 1)^2 = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

$(C)$  coupe l'axe des abscisses  $(O, \vec{i})$  au point qu'on note  $I(1; 0)$

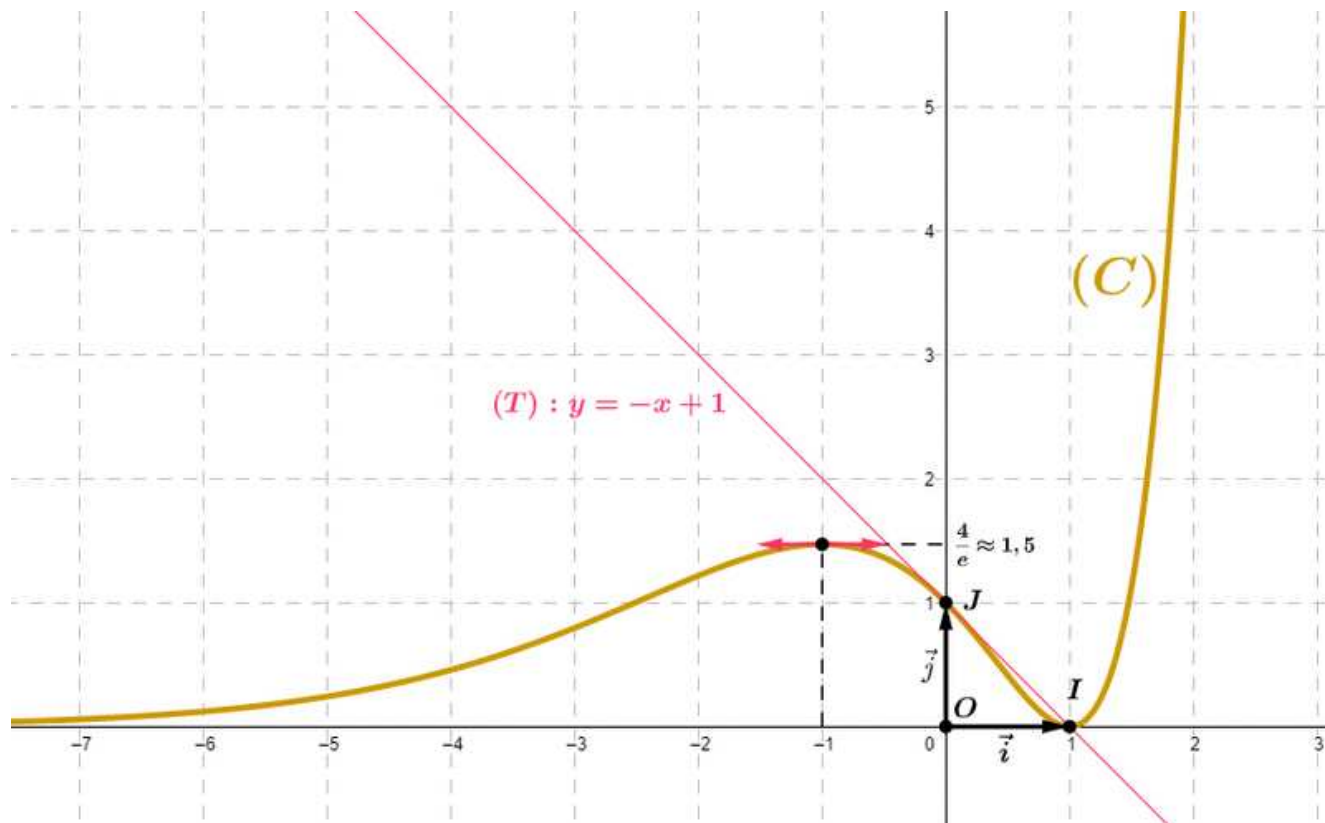
• Intersection de  $(C)$  avec l'axe des ordonnées  $(O, \vec{j})$  :

Pour trouver le point d'intersection , on calcule l'image de  $x = 0$  par  $f$  .

On a vu en 2-b) que  $f(0) = 1$

$(C)$  coupe l'axe des ordonnées  $(O, \vec{j})$  au point qu'on note  $J(0; 1)$

5-a) La représentation graphique de  $(C)$  et  $(T)$  :



b) Le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$  correspond graphiquement au nombre de points d'intersection de la courbe  $(C)$  avec la droite horizontale d'équation  $y = m$  :

Distinguons les cas suivants :

- $m > \frac{4}{e}$  : La droite horizontale coupe la courbe  $(C)$  une seule fois .
- $m = \frac{4}{e}$  : La droite horizontale coupe la courbe  $(C)$  deux fois .
- $0 < m < \frac{4}{e}$  : La droite horizontale coupe la courbe  $(C)$  trois fois .
- $m = 0$  : La droite horizontale coupe la courbe  $(C)$  une seule fois .
- $m < 0$  : La droite horizontale ne coupe pas la courbe  $(C)$  .

Donc :

$$\text{Le nombre de solutions de l'équation } f(x) = m \text{ est : } \begin{cases} 1 & \text{si } m > \frac{4}{e} \text{ ou si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m = \frac{4}{e} \\ 3 & \text{si } \frac{4}{e} > m > 0 \\ 0 & \text{si } 0 > m \end{cases}$$

6) Montrons que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} F'(x) &= [(x^2 - 4x + 5)e^x]' &= (x^2 - 4x + 5)'e^x + (x^2 - 4x + 5)(e^x)' \\ &= (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 5)e^x &= (2x - 4 + x^2 - 4x + 5)e^x \\ &= (x^2 - 2x + 1)e^x &= f(x) \end{aligned}$$

$F$  est bien une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$

7) L'aire  $A$  de la partie  $E$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$  est en unité d'aire :

$$A = \int_0^1 |f(x)| \, dx .$$

Et puisque  $f(x) \geq 0$  pour tout réel  $x$ , alors :  $A = \int_0^1 f(x) \, dx$

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x) \, dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= F(1) - F(0) &= (1 - 4 + 5)e^1 - (0 - 0 + 5)e^0 \\ &= 2e - 5 \end{aligned}$$

Conclusion :

L'aire de la partie  $E$  est en unité d'aire (UA) :  $A = 2e - 5$