Bac Mathématiques

Burkina Faso 2023

Série D

2ème tour

Durée : 4h
Coefficient : 5
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 (4 points)

EXERCICE N°1 (4 points)

On considère le nombre complexe a défini par $a = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$.

1) Ecrire a sous la forme algébrique. (0,5 pt)
2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système d'inconnues z et z' $\begin{cases} z + iz' = 1 + i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2 - 5i \end{cases}$. (0,75 pt)
3) Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On a les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$. On considère l'application f de P privé de A dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-3+i}{-iz+2}$
   a) Soit C le point d'affixe $1 - i$.
   Calculer l'affixe de $f(C)$. (0,5 pt)
   b) Montrer que $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$. (0,25 pt)
   c) *Interpréter géométriquement* le module et l'argument de z'. (0,75 pt)
   d) *En déduire :*
   - l'ensemble E_1 des points M tel que $z' \in \mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
   - l'ensemble E_2 des points M tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
   - l'ensemble E_3 des points M tel que $|z'| = 1$. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

EXERCICE N°2 (4 points)

Un sac contient 6 boules noires, 3 boules vertes et une boule rouge indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 2 boules.

1) Calculer la probabilité de tirer 2 boules de même couleur. (0,5 pt)
2) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule verte. (0,5 pt)
3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe (+2) si les 2 boules sont de même couleur et (-2) si les 2 boules sont de couleurs différentes.
   Déterminer la loi de probabilité de X. (0,75 pt)
4) On recommence 3 fois la même épreuve, en notant à chaque fois la valeur X obtenue et en remettant les 2 boules dans le sac après chaque tirage.
   Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des 3 valeurs obtenues par X.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y. (1,25 pts)
   b) Calculer l'espérance mathématique de Y. (0,5 pt)
   c) Déterminer la fonction de répartition de Y. (0,5 pt)

Problème (12 points)

Partie A (2 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x} + b$ soit une solution de (E).
2) On pose $h = z + g$. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$. (0,5 pt)
3) Résoudre l'équation différentielle (E') et en déduire les solutions de (E). (0,5 pt)
4) Déterminer la solution k de (E) s'annulant en 0. (0,5 pt)

Partie B (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 2cm.

1) a) Calculer la limite de f en $-\infty$. En déduire que la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote (D) dont on précisera l'équation. (0,5 pt)
   b) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (D) et préciser les coordonnées du point A, intersection de $(\mathcal{C})$ et (D). (0,5 pt)
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu. (0,75 pt)
3) a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pt)
   b) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
4) Tracer (D) et $(\mathcal{C})$.

Partie C (4 points)

1) a) Calculer en utilisant une intégration par parties $I = \int_0^{\frac{1}{2}}(1 - f(x))\,dx$. (1 pt)

   b) Donner une interprétation géométrique de I. (0,5 pt)

2) Calculer $J = \int_{-1}^{0}(2x-1)\,e^{2x}dx$. (0,5 pt)

3) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer $K = \int_{-1}^{0}(2x-1)^2 e^{4x}dx$. (1 pt)

4) Soit Δ le domaine des points du plan tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

   a) Exprimer en fonction de J et K le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de Δ autour de l'axe des abscisses. (0,5 pt)

   b) Calculer en cm^3 le volume V. (0,5 pt)

Partie D (1,5 points)

On considère dans le même repère que $(\mathcal{C})$ la courbe (Γ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = 1 - \frac{1+\ln t}{t} \end{cases} \quad , t \geq 1$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ). (0,75 pt)

2) Expliquer la construction de (Γ) à partir de $(\mathcal{C})$ puis construire (Γ) en pointillés. (0,75 pt)

On donne : $\ln 2 \approx 0,69$.

Correction

Exercice 1

1) Simplifions l'expression du complexe a pour aboutir à sa forme algébrique :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{3-i}{2+i}+\frac{2+i}{i}-3(1-2i)^2-2(2+i)(3+i) \\
&= \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-i(2+i)-3(1-4i+4i^2)-2(6+2i+3i-1) \\
&= \frac{6-3i-2i-1}{5}-2i+1-3(-3-4i)-2(5+5i) \\
&= \frac{5-5i}{5}-2i+1+9+12i-10-10i \\
&= \frac{5(1-i)}{5} \\
&= 1-i
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\boxed{a=1-i}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant : $\begin{cases} z+iz'=1+i \\ \frac{1}{2}z+(1-i)z'=2-5i \end{cases}$

$$\begin{cases} z+iz'=1+i \\ \dfrac{1}{2}z+(1-i)z'=2-5i \end{cases} \iff \begin{cases} z+iz'=1+i \\ z+2(1-i)z'=4-10i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z+iz'=1+i \\ iz'-2(1-i)z'=1+i-4+10i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=1+i-iz' \\ z'(-2+3i)=3+11i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=1+i-iz' \\ z'=\dfrac{(3+11i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=1+i-iz' \\ z'=\dfrac{6+9i-22i+33}{13}=\dfrac{39-13i}{13} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=1+i-i(3-i) \\ z'=3-i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=-2i \\ z'=3-i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc :

$$\boxed{S = \{(-2i; 3-i)\}}$$

3-a) Soit C le point d'affixe $z_C = 1-i$,alors l'affixe du point $f(C)$ est :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z_C - 3 + i}{-iz_C + 2} &= \frac{1 - i + 3 + i}{-i(1-i)+2} \\ &= \frac{4}{1-i} &= \frac{4(1+i)}{2} \\ &= 2(1+i) &= 2+2i \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'affixe de } f(C) \text{ est : } 2+2i}$$

b) Directement :

$$z' = \frac{z-3+i}{-iz+2} = \frac{z-3+i}{-i(z+2i)} = \frac{i(z-3+i)}{-i^2(z+2i)} = \frac{i(z-3+i)}{z+2i} \iff \boxed{z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}}$$

c) Puisque $z_A = -2i$ et $z_B = 3-i$, alors $z' = \dfrac{i(z-3+i)}{z+2i} = \dfrac{i(z-z_B)}{z-z_A}$

Donc :

- $|z'| = \left|\dfrac{i(z-z_B)}{z-z_A}\right| = \dfrac{|i(z-z_B)|}{|z-z_A|} = \dfrac{|i| \ \ |z-z_B|}{|z-z_A|} = \dfrac{1 \times BM}{AM} = \dfrac{BM}{AM}$
- $\arg(z') \equiv \arg\left(\dfrac{i(z-z_B)}{z-z_A}\right) \ [2\pi] \equiv \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) \ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2} + \text{ mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) \ [2\pi]$

Conclusion :

$$\boxed{|z'| = \frac{BM}{AM} \qquad \text{et} \qquad \arg(z') \equiv \text{ mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) + \frac{\pi}{2} \ [2\pi]}$$

d)

- L'ensemble E_1 :

$$\begin{aligned} M(z) \in E_1 &\iff z' \in \mathbb{R}^* \\ &\iff \arg(z') = k\pi \, ; \, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) + \frac{\pi}{2} = k\pi \, ; \, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_1 \text{ est le cercle de diamètre le segment } [AB] \text{ privé des points } A \text{ et } B}$$

• L'ensemble E_2 :

$$\begin{aligned} M(z) \in E_2 &\iff z' \in i\mathbb{R}^* \\ &\iff \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \arg(z') = -\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \text{mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{mes}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_2 \text{ est la droite } (AB) \text{ privé des points } A \text{ et } B}$$

• L'ensemble E_3 :

$$\begin{aligned} M(z) \in E_3 &\iff |z'| = 1 \\ &\iff \frac{BM}{AM} = 1 \\ &\iff AM = BM \end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_3 \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$$

Exercice 2

Un sac contient six boules noires, trois boules vertes et une boule rouge, donc **10** au total . Et on tire simultanément au hasard **deux** boules du sac .

Donc : Card $\Omega = \binom{10}{2} = 45$

1) Notons **A " Les deux boules tirées sont de même couleur"** . Donc $A = \{N\ ,\ N\}$ ou $\{V\ ,\ V\}$

$$p(A) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{3}{2}}{45} = \frac{15+3}{45} = \frac{2}{5} \Longrightarrow \boxed{p(A) = \frac{2}{5}}$$

2) Notons **B : "Au moins une des deux boules tirées est verte"** . Donc $B = \{V\ ,\ N\}$ ou $\{V\ ,\ R\}$ ou $\{V\ ,\ V\}$

$$p(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{3}{2}}{45} = \frac{3\times 6 + 3\times 1 + 3}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \Longrightarrow \boxed{p(B) = \frac{8}{15}}$$

3) Les valeurs prises par X sont : -2 et $+2$

• $X = 2$, alors les deux boules tirées sont de même couleur, d'où : $p(X=2) = p(A) = \dfrac{2}{5}$

• $X = -2$, puisque $p(X=2) + p(X=-2) = 1 \Longrightarrow p(X=-2) = 1 - p(X=2) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

Et on remplit le tableau :

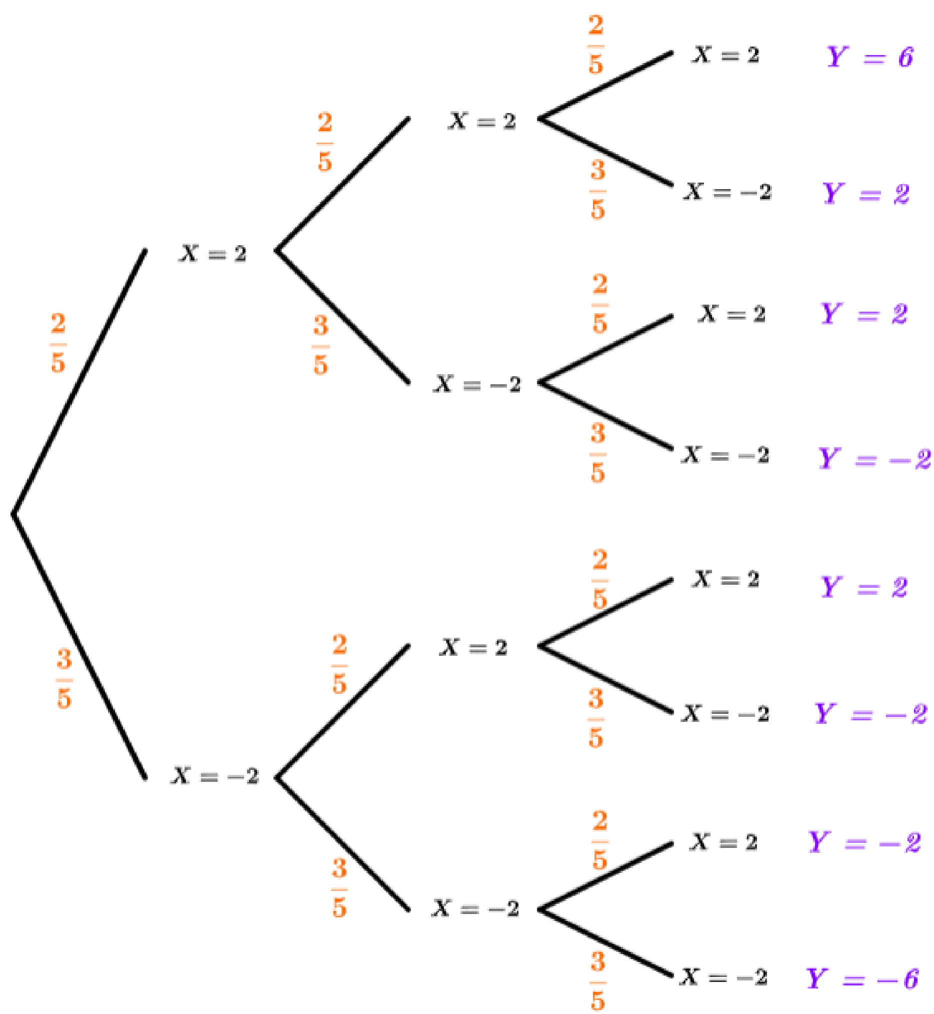
x_i	-2	2
$p(X = x_i)$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{5}$

Remarque :

> On peut aussi calculer $p(X = -2)$ de la manière suivante :
>
> Si $X = -2$, alors les deux boules tirées sont de couleurs différentes, c'est-à-dire : $\{V , N\}$ ou $\{V , R\}$ ou $\{N , R\}$
>
> Il s'ensuit alors que : $P(X = -2) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{6}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{6}{1}\binom{1}{1}}{45} = \dfrac{3 \times 6 + 3 \times 1 + 6 \times 1}{45} = \dfrac{18 + 3 + 6}{45} = \dfrac{27}{45} = \dfrac{3}{5}$

4-a) Les valeurs prises par Y sont : -6 , -2 , 2 et 6

Construisons l'arbre pondéré correspondant :



- $Y = -6 \ : \ p(Y = -6) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$
- $Y = -2 \ : \ p(Y = -2) = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$
- $Y = 2 \ : \ p(Y = 2) = 3 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125}$
- $Y = 6 \ : \ p(Y = 6) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

Vérification : $p(Y = -6) + p(Y = -2) + p(Y = 2) + p(Y = 6) = \frac{27 + 54 + 36 + 8}{125} = \frac{125}{125} = 1$

Et on remplit le tableau :

y_i	-6	-2	2	6
$p(Y = y_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

b) Calculons l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^{3} y_i \, p(Y = y_i) \\ &= -6 \times \frac{27}{125} - 2 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 6 \times \frac{8}{125} \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = -\frac{6}{5}}$$

c) La fonction de répartition F de Y est définie de $\mathbb{R}$ dans $[0; 1]$ par $F(x) = p(Y \leqslant x)$

Donc, d'après la loi de probabilité de Y trouvé en 4-a) , on a :

- Si $x \in]-\infty; -6[$: $F(x) = 0$
- Si $x \in [-6; -2[$: $F(x) = \frac{27}{125}$
- Si $x \in [-2; 2[$: $F(x) = \frac{27}{125} + \frac{54}{125} = \frac{81}{125}$
- Si $x \in [2; 6[$: $F(x) = \frac{81}{125} + \frac{36}{125} = \frac{117}{125}$
- Si $x \in [6; +\infty[$: $F(x) = 1$

Conclusion :

La fonction de répartition F est définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; -6[\\ \dfrac{27}{125} & \text{si } x \in [-6; -2[\\ \dfrac{81}{125} & \text{si } x \in [-2; 2[\\ \dfrac{117}{125} & \text{si } x \in [2; 6[\\ 1 & \text{si } x \in [6; +\infty[\end{cases}$

Problème

Partie A :

$$(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$$

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x} + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R} : g'(x) - 2g(x) = 2(e^{2x} - 1) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} : (axe^{2x} + b)' - 2(axe^{2x} + b) = 2(e^{2x} - 1) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} : ae^{2x} + 2axe^{2x} - 2axe^{2x} - 2b = 2e^{2x} - 2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} : ae^{2x} - 2b = 2e^{2x} - 2 \\ &\iff \begin{cases} a = 2 \\ -2b = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = 2xe^{2x} + 1}$$

2) Soit $h = z + g$ dérivable sur $\mathbb{R}$, avec z une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
h \text{ est solution de } (E) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : h'(x) - 2h(x) = 2(e^{2x} - 1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : ((z(x) + g(x))'(x) - 2(z(x) + g(x)) = 2(e^{2x} - 1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : z'(x) + g'(x) - 2z(x) - 2g(x) = 2(e^{2x} - 1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : z'(x) - 2z(x) + \underbrace{g'(x) - 2g(x)}_{2(e^{2x}-1)} = 2(e^{2x} - 1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : z'(x) - 2z(x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{z \text{ est une solution de } (E') : y' - 2y = 0}
\end{aligned}
$$

3) (E') est une équation diférentielle de premier ordre sans second membre, alors directement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E') \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto Ae^{2x} \ , \ A \in \mathbb{R}}$$

z est solution de (E'), c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R} : z(x) = Ae^{2x}$, $A \in \mathbb{R}$, si et seulement si h est solution de (E) , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = g(x) + z(x) = 2xe^{2x} + 1 + Ae^{2x} \ , \ A \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : h(x) = (2x + A)e^{2x} + 1 \, ; \, A \in \mathbb{R}$$

On conclut que :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto (2x + A)e^{2x} + 1 \ , \ A \in \mathbb{R}}$$

4) La fonction k est une solution de (E) avec $k(0) = 0$, donc :

Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $k(x) = (2x + A)e^{2x} + 1$, déterminons la constante A :

$$k(0) = 0 \Longrightarrow (0 + A)e^{0} + 1 = 0 \Longrightarrow A + 1 = 0 \Longrightarrow A = -1$$

$$\boxed{\text{La solution } k \text{ de } (E) \text{ qui vérifie } k(0) = 0 \text{ s'écrit : } \forall x \in \mathbb{R} \ , \ k(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1}$$

Partie B :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$$

1-a) Calculons la limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x - 1)e^{2x} + 1 = \lim_{x \to -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + 1 \underbrace{=}_{X=2x} \lim_{X \to -\infty} Xe^{X} - e^{X} + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

Interprétation graphique :

$$\boxed{\text{La droite } (D) \text{ d'équation } y = 1 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe } (\mathscr{C})}$$

b) Etudions le signe de $f(x) - y$ avec $y = 1$ l'équation de la droite (D) :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - y \quad = \quad (2x-1)e^{2x} + 1 - 1 \quad = \quad (2x-1)e^{2x}$$

Or, pour tout réel x : $e^{2x} > 0$, donc le signe de $f(x) - y$ est celui de $2x - 1$, d'où :

- $\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\ : 2x - 1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\ : f(x) - y < 0$
- Si $x = \frac{1}{2}$: $2x - 1 = 0$, donc $f(x) = y$
- $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\ : 2x - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\ : f(x) - y > 0$

On en déduit que :

- $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$
- $(\mathscr{C})$ coupe la droite (D) au point $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$
- $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2) Calculons la limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} + 1 = (+\infty) \times (+\infty) + 1 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Calculons alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)e^{2x} + 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x} e^{2x} + \frac{1}{x} = 2 \times (+\infty) + 0 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

Interprétation graphique :

$$\boxed{\text{La courbe } (\mathscr{C}) \text{ admet une branche parabolique de la direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de } +\infty}$$

3-a) On sait que, d'après la **partie A)**, que f est une solution de l'équation différentielle (E) , alors :

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 2$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2f(x) + 2e^{2x} - 2 = 2(2x-1)e^{2x} + 2e^{2x} = 4xe^{2x}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 4xe^{2x}}$$

Or, pour tout réel x , $e^{2x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de x , d'où :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in]-\infty;0[: & f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 & \\ \forall x \in]0;+\infty[: & f'(x) > 0 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty;0[\\ f \text{ admet un minimum en } 0 \\ f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[\end{array}}$$

Et on dresse le tableau de variations de la fonction f :

On rappelle que $f(0) = k(0) = 0$ (d'après la dernière question de la **partie A**))

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) La fonction f admet un minimum en 0 , alors : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant f(0) = 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant 0}$$

4) Voir le graphique à la fin de la correction du problème s.v.p.

Partie C :

1-a) On a :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(x))\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x$$

Procédons par une intégration par parties, posons pour cela :

$$\begin{cases} u(x) = -(2x-1) \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = -2 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x &&= \int_0^{\frac{1}{2}} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x &&= \left[-\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} &&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e-1) \\
&= \frac{1}{2}(e-2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}(e-2)}$$

b) On a vu que, sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$, la droite horizontale $(D) : y = 1$ est au dessus de la courbe $(\mathscr{C})$.
(avec intersection en $\dfrac{1}{2}$)

Et puisque $\left[0; \dfrac{1}{2}\right] \subset \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$, donc $\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$: $1 - f(x) \geqslant 0$

De plus : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(x))\ \mathrm{d}x$

Alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} I \text{ représente l'aire délimitée par la droite } (D) \text{ , la courbe } (\mathscr{C}) \text{ ,} \\ \text{l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation } x = \dfrac{1}{2} \text{ , en unité d'aire} \end{array}}$$

2) Pour ne pas refaire un calcul déjà fait, on tire de la question 1-a) <u>une</u> primitive de la fonction $x \mapsto -(2x-1)e^{2x}$

$$\int -(2x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1) - \int e^{2x}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1) + \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}(2-2x) = e^{2x}(1-x)$$

Donc <u>une</u> primitive de la fonction $x \mapsto (2x-1)e^{2x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{2x}(1-x) = e^{2x}(x-1)$

On en déduit :

$$J = \int_{-1}^{0} (2x-1)e^{2x}\ \mathrm{d}x = \left[e^{2x}(x-1)\right]_{-1}^{0} = -1 - (-2e^{-2}) = 2e^{-2} - 1$$

$$\boxed{J = 2e^{-2} - 1}$$

3) On a :

$$K = \int_{-1}^{0} (2x-1)^2 e^{4x} \, \mathrm{d}x$$

Procédons par une intégration par parties, posons pour cela :

$$\begin{cases} u_1(x) = (2x-1)^2 \\ v'(x) = e^{4x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1'(x) = 2(2x-1)'(2x-1) = 4(2x-1) \\ v(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^{0} (2x-1)^2 e^{4x} \, \mathrm{d}x &&= \int_{-1}^{0} u_1(x)v'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= [u_1(x)v(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u_1'(x)v(x) \, \mathrm{d}x &&= \left[\frac{1}{4}e^{4x}(2x-1)^2\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (2x-1)e^{4x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - \int_{-1}^{0} (2x-1)e^{4x} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Procédons par une seconde intégration par parties, et posons :

$$\begin{cases} u_2(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{4x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_2'(x) = 2 \\ v(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - \int_{-1}^{0} (2x-1)e^{4x} \, \mathrm{d}x &&= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - \int_{-1}^{0} u_2(x)v'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - [u_2(x)v(x)]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} u_2'(x)v(x) \, \mathrm{d}x &&= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - \left[\frac{1}{4}e^{4x}(2x-1)\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}e^{4x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_{-1}^{0} &&= \frac{1}{4} - \frac{9}{4}e^{-4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-4} + \frac{1}{8}\left(1 - e^{-4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - 3e^{-4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4} &&= \frac{5}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{K = \frac{5}{8}\left(1 - 5e^{-4}\right)}$$

4-a) Soit Δ le domaine des points du plan tels que $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de Δ autour de l'axe des abscisses est en unité de volume :

$$V = \pi \int_{-1}^{0} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \quad (uv)$$

Calcul :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{0} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x &&= \pi \int_{-1}^{0} ((2x-1)e^{2x}+1)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-1}^{0} \left(((2x-1)e^{2x})^2 + 2(2x-1)e^{2x} + 1\right) \, \mathrm{d}x &&= \pi \left(\underbrace{\int_{-1}^{0} (2x-1)^2 e^{4x} \, \mathrm{d}x}_{=K} + 2 \underbrace{\int_{-1}^{0} (2x-1)e^{2x} \, \mathrm{d}x}_{=J} + \underbrace{\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x}_{=1} \right) \\
&= \pi \left(K + 2J + 1\right) \; (uv)
\end{aligned}$$

On conclut alors que :

$$\boxed{V = \pi(K + 2J + 1) \quad (uv)}$$

b) On a en unité de volume (uv) :

$$V = \pi(K+2J+1) = \pi\left(\frac{5}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 2(2e^{-2}-1)+1\right) = \pi\left(\frac{5}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 4e^{-2} - 1\right) = \pi\left(-\frac{3}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 4\right.$$

Or, l'unité graphique est 2 cm , il s'ensuit que : 1 uv $= (2 \text{ cm } \times 2 \text{ cm } \times 2 \text{ cm }) = 8 \text{ cm}^3$

On obtient :

$$\begin{aligned}
V &= \pi\left(-\frac{3}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 4e^{-2}\right) \quad (uv) = 8\pi\left(-\frac{3}{8} - \frac{25}{8}e^{-4} + 4e^{-2}\right) \quad (\text{ cm}^3) \\
&= \pi\left(-3 - 25e^{-4} + 32e^{-2}\right) \quad (\text{ cm}^3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{V = \pi\left(-3 + 32e^{-2} - 25e^{-4}\right) \quad \text{cm}^3}$$

Partie D :

$$(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = \dfrac{\ln t}{2} \\ y(t) = 1 - \dfrac{1+\ln t}{t} \end{cases} \; ; t \geqslant 1$$

1) On a, pour tout $t \geqslant 1$: $x(t) = \dfrac{t}{2} \Longrightarrow \ln t = 2x(t) \Longrightarrow t = e^{2x(t)}$

On écrit alors y en fonction de x :

$$\forall t \geqslant 1 : y(t) = 1 - \frac{1+\ln t}{t} = 1 - \frac{1+2x(t)}{e^{2x(t)}} = 1 - (1+2x(t))e^{-2x(t)}$$

Or : $\forall t \geqslant 1 : \ln t \geqslant 0 \Longrightarrow x(t) = \dfrac{\ln t}{2} \geqslant 0$

D'où :

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (\Gamma) \text{ s'écrit : } y(x) = 1 - (1+2x)e^{-2x} \;\; ; \;\; x \geqslant 0}$$

2) On remarque que :

$$\forall x \geqslant 0 : y(x) \;=\; 1 - (1+2x)e^{-2x} \;=\; (-2x-1)e^{-2x} + 1 \;=\; (2(-x)-1)e^{2(-x)} + 1 \;=\; f(-x)$$

Or, $\forall x \geqslant 0 : -x \leqslant 0$

On en déduit que :

$$\boxed{(\Gamma) \text{ se déduit par symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées de la partie de la courbe } (\mathscr{C}) \text{ située sur }]-\infty, 0]}$$

Le graphique :