

Bac Burkina Faso 2022

Mathématiques Série A4

1er tour
Durée : 3 heures
Coefficient : 3

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_n = \frac{2n+5}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1-a) Démontrer que la suite (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Calculer, en fonction de n , le réel $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = e^{-U_n}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

c) Calculer en fonction de n , le réel $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

N.B : On donne Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 (6 points)

Le tableau ci-dessous donne le nombre de minutes passées à étudier un soir par les élèves d'une classe de Terminale A.

Temps	$[0, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60[$	$[60, 80[$	$[80, 100[$	$[100, 120[$
Effectifs	5	8	3	13	11	10

1-a) Quelle est la population étudiée?

b) Quel est l'effectif total de cette population?

c) Quelle est la classe modale?

d) Le caractère étudié est-il quantitatif ou qualitatif?

2) Calculer la fréquence de la classe $[20, 40[$.

3-a) Quel est le pourcentage des élèves qui étudient moins de **60 minutes**?

b) Donner dans un tableau, les centres de classes et les fréquences des classes exprimées en pourcentages.

c) Calculer la moyenne de cette série statistique.

4) Construire l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

Echelle :

- En abscisse **1cm** pour **20mn** .
- En ordonnées **1cm** pour **1 élève** .

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = -1 + x + \frac{1}{2}e^{-x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique **1cm** .

1-a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

2) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

3) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) .

4-a) Calculer la dérivée $f'(x)$ sur D_f .

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis déduire le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x = 0$.

6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ) et la tangente (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne : $\begin{cases} f(1) \approx 0,2 & f(-\ln 2) \approx -0,7 \\ f(2) \approx 1,1 & f(-2) \approx 0,7 \end{cases}$.



Correction

Exercice 1

1-a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \frac{2n+5}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{5}{3}$$

Donc :

$$(U_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = \frac{2}{3} \text{ et de premier terme } U_0 = \frac{5}{3}$$

b) D'après le cours, la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique (U_n) est :

$$S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1) \frac{U_0 + U_n}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} S'_n &= (n+1) \frac{U_0 + U_n}{2} = \frac{1}{2}(n+1) \left(\frac{5}{3} + \frac{2n+5}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2}(n+1) \times \frac{1}{3}(10+2n) = \frac{1}{2}(n+1) \times \frac{1}{3} \times 2(5+n) \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : S'_n = \frac{(n+1)(n+5)}{3}$$

2-a) On a $V_0 = e^{-U_0} = e^{-\frac{5}{3}}$

De plus, puisque la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout entier naturel n , $V_n = e^{-U_n} \neq 0$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut calculer :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{e^{-U_{n+1}}}{e^{-U_n}} = e^{-(U_{n+1}-U_n)} = e^{-\frac{2}{3}}$$

Le quotient entre deux termes consécutifs est donc constant, donc :

$$\text{La suite } (V_n) \text{ est géométrique de raison } q = e^{-\frac{2}{3}} \text{ et de premier terme } V_0 = e^{-\frac{5}{3}}$$

b) (V_n) est géométrique de raison $q = e^{-\frac{2}{3}}$ et de premier terme $V_0 = e^{-\frac{5}{3}}$, alors :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, V_n = V_0 q^n = e^{-\frac{5}{3}} \left(e^{-\frac{2}{3}} \right)^n$$

Or, puisque $-\frac{2}{3} < 0$, alors $0 < e^{-\frac{2}{3}} < 1$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{2}{3}} \right)^n = 0$.

On en déduit que :

c) D'après le cours, la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique (V_n) de raison $q = e^{-\frac{2}{3}} \neq 1$ est :

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = V_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

D'où :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : S_n = e^{-\frac{5}{3}} \frac{1 - \left(e^{-\frac{2}{3}}\right)^{n+1}}{1 - e^{-\frac{2}{3}}}$$

Exercice 2

1-a) Directement :

La population étudiée est les élèves d'une classe de terminale A

b) L'effectif total noté N est la somme de tous les effectifs , alors :

$$N = 5 + 8 + 3 + 13 + 11 + 10 \iff N = 50$$

L'effectif total de cette population est $N = 50$

c) La classe modale est la classe dont l'effectif est le plus élevé qui est 13 , donc :

La classe modale est $[60, 80[$

d) Le caractère statistique étudié est le nombre de minutes passées à étudier un soir .

Les réponses obtenues sont des nombres , regroupés sous forme de classes , alors :

Le caractère étudié est quantitatif (continu)

2) La fréquence de la classe $[20, 40[$, notée $f_{[20,40[}$ correspond au pourcentage d'élèves qui étudient le soir entre 20 et 40 min : Il y a 8 élèves sur 50 qui sont dans cette tranche .

$$\text{Soit } f_{[20,40[} = \frac{8}{50} \times 100 \Rightarrow f_{[20,40[} = 16\%$$

La fréquence de la classe $[20, 40[$ est : $f_{[20,40[} = 16\%$

3-a) Le nombre des élèves qui étudient moins de **60 minutes** est la somme des effectifs des classes $[0, 20[$, $[20, 40[$ et $[40, 60[$

Soit $5 + 8 + 3 = 16$ élèves sur 50 , ce qui donne en pourcentage : $\frac{16}{50} \times 100 = 32\%$

32% des élèves étudient moins de 60 minutes le soir

b) On calcule les centres C et les fréquences f de chaque classe :

- La classe $[0, 20[$: $C_{[0,20[} = \frac{0+20}{2} = 10$, $f_{[0,20[} = \frac{5}{50} \times 100 = 10\%$
- La classe $[20, 40[$: $C_{[20,40[} = \frac{20+40}{2} = 30$, $f_{[20,40[} = 16\%$ d'après 2)
- La classe $[40, 60[$: $C_{[40,60[} = \frac{100}{2} = 50$, $f_{[40,60[} = \frac{3}{50} \times 100 = 6\%$
- La classe $[60, 80[$: $C_{[60,80[} = \frac{140}{2} = 70$, $f_{[60,80[} = \frac{13}{50} \times 100 = 26\%$
- La classe $[80, 100[$: $C_{[80,100[} = \frac{180}{2} = 90$, $f_{[80,100[} = \frac{11}{50} \times 100 = 22\%$
- La classe $[100, 120[$: $C_{[100,120[} = \frac{220}{2} = 110$, $f_{[100,120[} = \frac{10}{50} \times 100 = 20\%$

On regroupe les résultats dans le tableau suivant :

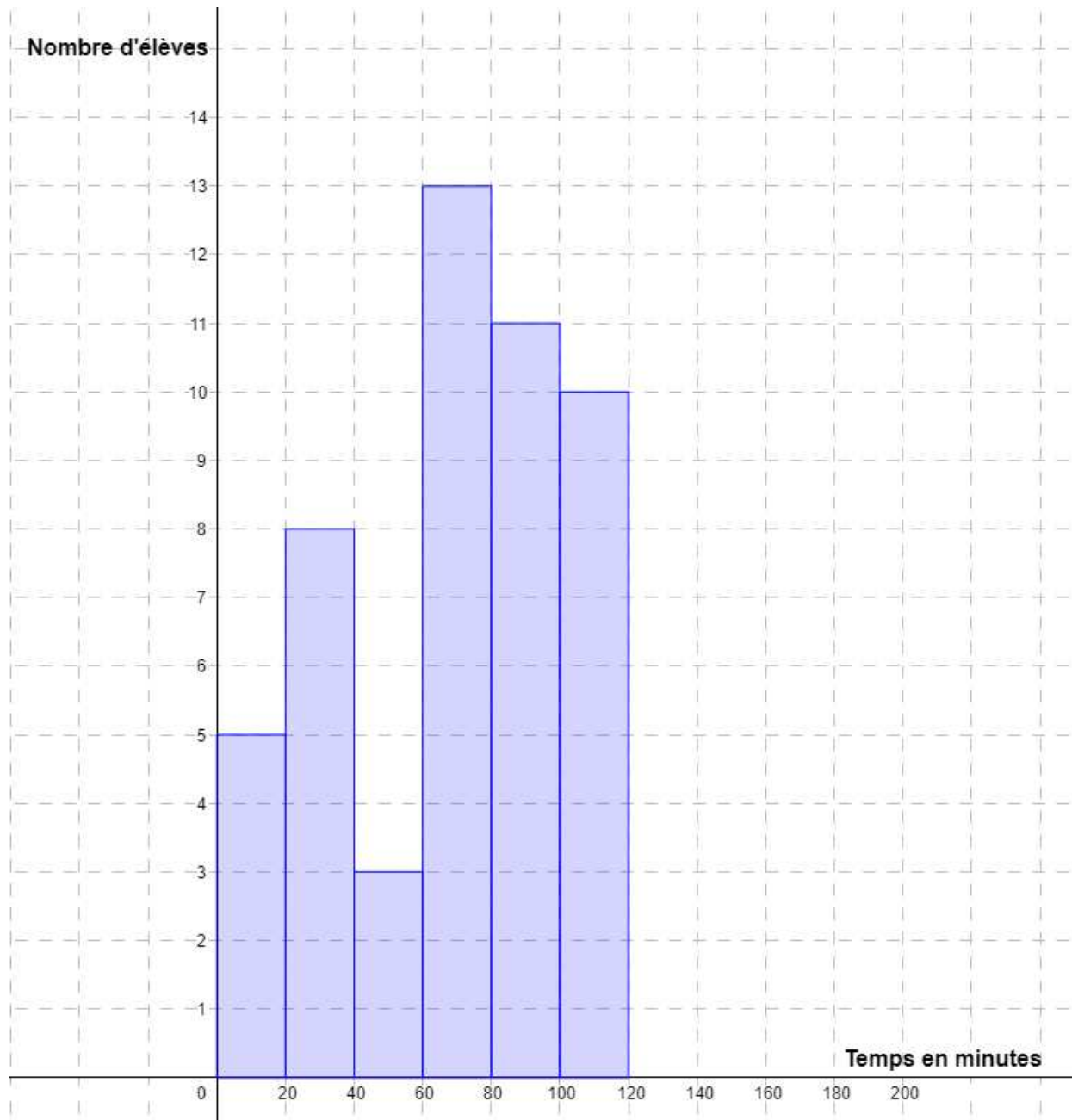
Temps	$[0, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60[$	$[60, 80[$	$[80, 100[$	$[100, 120[$
Effectifs	5	8	3	13	11	10
Centres de classes	10	30	50	70	90	110
fréquences	10%	16%	6%	26%	22%	20%

c) Calculons la moyenne de cette série statistique :

$$\bar{m} = \frac{10 \times 5 + 30 \times 8 + 50 \times 3 + 70 \times 13 + 90 \times 11 + 110 \times 10}{50} = \frac{3440}{50} = 68,8$$

La moyenne de cette série statistique est $\bar{m} = 68,8$

4) L'histogramme des effectifs de cette série statistique :



Problème

Etude de la fonction f définie par $f(x) = -1 + x + \frac{1}{2}e^{-x}$

1-a) La fonction exponentielle et les fonctions polynomiales étant définies sur $\mathbb{R}$, alors :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

b) La limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + x + \frac{1}{2}e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(-e^x + xe^x + \frac{1}{2} \right)$$

On sait que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
 Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(-e^x + xe^x + \frac{1}{2} \right) = +\infty \left(0 + 0 + \frac{1}{2} \right) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

La limite en $+\infty$:

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + x + \frac{1}{2}e^{-x} = -1 + \infty + 0 = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x - 1$

Calculons la limite de $f(x) - y$ en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + x + \frac{1}{2}e^{-x} - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \quad \left(, \text{ en effet } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \right)$$

On en déduit que :

$$\boxed{(\Delta) : y = x - 1 \text{ est asymptote oblique à } (\mathcal{C}_f) \text{ en } +\infty}$$

3) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - y$ sur $\mathbb{R}$, avec $y = x - 1$ l'équation de la droite (Δ)

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} : f(x) - y = -1 + x + \frac{1}{2}e^{-x} - (x - 1) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Or , on sait que pour tout réel $x : e^{-x} > 0$, donc $f(x) - y > 0$ pour tout réel x

$$\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ est au-dessus de la droite } (\Delta) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

4-a) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme d'une fonction polynomiale et une fonction exponentielle toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \left(-1 + x + \frac{1}{2}e^{-x} \right)' = 1 + \frac{1}{2}(e^{-x})' = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{2 - e^{-x}}{2}}$$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - e^{-x}$

$$\text{On a : } 2 - e^{-x} = 0 \iff e^{-x} = 2 \iff -x = \ln 2 \iff x = -\ln 2$$

Donc :

- $x \leq -\ln 2 \iff -x \geq \ln 2 \iff e^{-x} \geq 2 \iff 2 - e^{-x} \leq 0 \iff f'(x) \leq 0$
- $x \geq -\ln 2 \iff -x \leq \ln 2 \iff e^{-x} \leq 2 \iff 2 - e^{-x} \geq 0 \iff f'(x) \geq 0$

D'où :

$\forall x \in]-\infty; -\ln 2] : f'(x) \leq 0$ $\forall x \in [-\ln 2; +\infty[: f'(x) \geq 0$ $f'(-\ln 2) = 0$
--

On en déduit que :

f est décroissante sur $] -\infty; -\ln 2]$ f est croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$

c) Les résultats de la question précédente permettent de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(-\ln 2) = -\ln 2$	$+\infty$

Avec $f(-\ln 2) = -1 - \ln 2 + \frac{1}{2}e^{\ln 2} = -1 - \ln 2 + 1 = -\ln 2$

5) Une équation de la tangente (T) à la courbe de f en $x = 0$ s'écrit :

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Avec :

- $f'(0) = \frac{2 - e^{-0}}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$
- $f(0) = -1 + 0 + \frac{1}{2}e^{-0} = -1 + \frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$

On en déduit :

$(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
--

6) La représentation graphique :

