Pays : Burkina Faso	**Année :** 2016	**Épreuve :** Mathématiques, 1er Tour
Examen : BAC, séries C-E	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 06

EXERCICE 1 (4 points)

Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. Les boules portant un numéro pair sont de couleur blanche ; les boules portant un numéro impair sont de couleur noire.

1. On suppose que, lorsque l'on tire une boule de l'urne, et si l'on désigne par P_k la probabilité de tirer la boule numérotée k, alors on a : $P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = \alpha$ et $P_2 = P_4 = P_6 = 2\alpha$.

On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer :

a) une boule blanche ?

b) une boule noire ?

c) On tire une boule. On note sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième fois une boule de l'urne. On réalise ainsi deux tirages successifs que l'on suppose indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules blanches sorties au cours des deux tirages.

α) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

β) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

2. On tire maintenant simultanément deux boules de l'urne. On associe à cette épreuve un univers Ω dont les éventualités sont des paires de deux boules. On suppose que si n est le nombre de boules blanches figurant dans une paire et p la probabilité de l'événement réduit à cette paire, alors le rapport $\frac{p}{n+1}$ est le même pour toutes les éventualités de Ω.

Calculer la probabilité de l'événement : « tirer deux boules blanches ».

NB : Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)z + i = 0$.

2. Soit θ un réel tel que : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}z\cos\theta + e^{i2\theta} = 0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) En déduire l'autre solution de (E).

3. On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{i2\theta}$.

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un losange.

c) Déterminer le(s) réel(s) θ pour que la mesure de l'aire du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

PROBLÈME (12 points)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par (C_m) la courbe d'équation : $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$, où m est un paramètre réel.

Partie I (7,5 points)

1. Montrer que quel que soit le réel m, la courbe (C_m) passe par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

2. On suppose que m est non nul.

a) Montrer que (C_m) est une conique à centre dont le centre I_m a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{2m} \ ; \ 0\right)$

b) Préciser suivant les valeurs de m, si (C_m) est une ellipse ou une hyperbole.

c) Construire (C_1) et (C_{-1}) dans le même repère.

3. Soit (α, β) un couple de nombres complexes et f la transformation du plan (P), qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \alpha z + \beta$.

a) Déterminer α et β sachant que les points A(3 ; 0) et B(-3 ; 0) ont pour images respectives les points A'(3 ; -3) et B'(-3 ; 3).

b) Donner la nature de f, puis déterminer ses éléments caractéristiques.

Dans la suite du problème, f est la transformation ainsi déterminée.

4. Justifier que l'ensemble (C'_{-1}), image de (C_{-1}) par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. Soit M le point de coordonnées (x, y) et M' le point de coordonnées (x', y'), image de M par f.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis x et y en fonction de x' et y'.

b) En déduire une équation cartésienne de (C'_1) image de (C_1) par f.

c) Construire (C'_1) dans le repère précédent.

Partie II (2,5 points)

Soit (D) la droite d'équation : $5x - y - 21 = 0$.

1. Déterminer une équation de (D'), image de (D) par f.

2. E et F (F d'ordonnée positive) sont les points d'intersection de (C_1) et (D), E' et F' leurs images respectives par f.

Déterminer les coordonnées des points E, F, E' et F'.

3. Soit (S) la surface délimitée par la courbe (C_1) et le segment [EF] et (S') son image par f.

Calculer l'aire A(S') de (S') et en déduire l'aire A(S) de (S).

Partie III (2 points)

On prend m = 0.

1. Quelle est la nature de (C_0) ?

2. Tracer (C_0) dans un autre repère.

3. Soit G le barycentre du système {(A, 2), (B, 1), (M, 1)} où M est un point de (C_0), A et B les points définis dans la partie f. On note (Γ_0) la courbe décrite par G lorsque M parcourt la courbe (C_0).

Démontrer que (Γ_0) est l'image de (C_0) par une homothétie de centre K(1 ; 0) dont on précisera le rapport.